ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 26 JANVIER 1947.

PRÉSIDENCE DE M. HENRI VILLAT.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le **Président** souhaite la bienvenue à M. **Costa Ribeiro**, Membre de l'Académie des Sciences du Brésil, qui assiste à la séance.

M. le **Président** s'exprime en ces termes :

L'Académie vient de faire une grande perte en la personne de M. **Godfrey Harold Hardy**, correspondant pour la section de Géométrie depuis le 5 février 1945, associé étranger depuis le 9 juin 1947.

Hardy était né le 7 février 1877, à Cambridge, dans le Surrey. Sauf une assez courte interruption, il resta toute sa vie fidèle à Cambridge. Après sa thèse en 1902, il devint « fellow » du « Trinity College », puis professeur à l'Université, et c'est à Cambridge qu'il est revenu comme professeur de Mathématiques pures, après avoir occupé pendant quelques années la chaire de Géométrie de l'Université d'Oxford. C'est dans la studieuse quiétude du « Trinity College » qu'il a vécu de longues années, avec son grand ami et collaborateur John Edensor Littlewood, dans une inlassable et féconde activité.

L'œuvre de Hardy est vaste et variée, elle porte essentiellement sur la théorie des nombres, théorie additive ou théorie analytique, et si l'on y rencontre des recherches ou d'importantes questions d'analyse pure ou de théorie des fonctions, elles sont plus ou moins liées à ses travaux sur la théorie des nombres. Un exposé complet de cette œuvre est ici impossible; bornons-nous à en marquer quelques caractères et résultats fondamentaux, suffisants pour donner une idée de sa profonde originalité.

Les travaux de Hardy et Littlewood sur la *partition des nombres*, notamment sur les théorèmes de Goldbach et de Waring, sont les plus remarquables, par la nouveauté et la puissance des méthodes analytiques, par la valeur des résultats obtenus : l'ingéniosité et la finesse de technique y dépassent l'objet même de la recherche.

Goldbach a énoncé sans démonstration que *tout nombre pair est la somme de*

deux nombres premiers impairs. Plus généralement Hardy a étudié le problème d'*exprimer un nombre entier par une somme de nombres premiers*. Il n'a pas réussi à démontrer le théorème de Goldbach lui-même, mais il a réussi avec Littlewood à établir une liaison curieuse et particulièrement intéressante entre la vérité de ce théorème et la vérité du célèbre théorème de Riemann sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ et des fonctions $L(s)$ de Dirichlet, la vérité du théorème de Riemann entraînant celle du théorème de Goldbach, ou de théorèmes analogues.

Par ailleurs, Waring avait énoncé en 1770 le théorème suivant : *tout entier positif n est la somme d'un nombre fini* $s(k)$ *de puissance* $k^{\text{ième}}$ *d'entiers positifs, quel que soit k, ce nombre* $s(k)$ *ne dépendant que de k, et non de n.*

La première démonstration de ce théorème avait été donnée par Hilbert en 1909; elle est belle, mais longue et difficile. Hardy s'est attaqué à la question avec de nouveaux procédés, il a réussi à donner une démonstration beaucoup plus aisée, trouvant en outre : 1° une limite supérieure de la plus petite valeur possible de $s(k)$; 2° une expression asymptotique du nombre des solutions de l'équation de Waring.

Ces travaux ont été rendus possibles par une étude très poussée des séries entières, des séries de Dirichlet, de séries analogues, de leur sommation, et de certains théorèmes d'inversion, dits *tauberiens*, qui jouent aujourd'hui un si grand rôle dans le calcul symbolique.

Il n'est donc pas étonnant que Hardy ait réussi à donner le premier résultat *positif* concernant *les zéros de* $\zeta(s)$ *situés sur la droite* $\mathcal{R}s = 1/2$, à savoir *qu'il y en a une infinité*.

Hardy a publié quelques ouvrages d'enseignement, aujourd'hui classiques, sur la théorie des nombres et sur l'analyse; il a dirigé la collection des *Cambridge Tracts*.

Il n'est pas nécessaire d'insister davantage pour marquer la diversité et la difficulté des problèmes attaqués par Hardy. Ces travaux ont nécessité l'emploi d'une technique de plus en plus fine, dont la création est en majeure partie l'œuvre de Hardy, souvent en collaboration avec Littlewood. La puissance de cette technique s'est révélée éminente, et Hardy occupe un rang exceptionnel dans la science mathématique moderne. Le nombre des Académies et des Sociétés savantes dont il a fait partie est difficile à préciser, tellement il est considérable. Notre Académie avait tenu à honneur de se l'attacher. Elle ressent profondément la grandeur de la perte que vient de faire le monde savant; c'est tout récemment que nous avons appris la fin de Hardy, survenue à Cambridge, le 1er décembre dernier.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur des équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre dont les caractéristiques sont lignes asymptotiques des surfaces intégrales.* Note [1] de M. **Jules Drach.**

I. *a.* Dans une Note récente [2], à laquelle je prie de se reporter, on a donné pour les équations en question une forme *explicite* qui peut conduire aux surfaces intégrales et parfois à leurs lignes asymptotiques. Mais on a dû supposer pour le complexe de droites *associé* (C), $\Omega = \Phi_\alpha + \Phi_\beta \Phi_\gamma \neq 0$; quand Ω est nul, on sait que le complexe est formé des *tangentes* D *à une surface* et que $d\alpha\, d\Phi - d\beta\, d\gamma$, relative aux droites D : $y = \alpha x + \beta$, $z = \gamma x + \Phi$ se décompose en deux facteurs. L'équation $\Omega = 0$, analogue à celle étudiée paragraphe **1** (*loc. cit.*), s'intègre par les formules $\Phi = bc\alpha + b\beta - c\gamma - \theta$, $\beta + c\alpha = \theta_b$, $b\alpha - \gamma = \theta_c$ où $\theta(b, c)$ est arbitraire et la surface (S) donnée par $x = c$, $y = \theta_b$, $z = b\theta_b - \theta$ est celle à laquelle les droites D sont tangentes; de plus $p = -\theta_c$, $q = b$. L'équation associée au complexe (C) est $p = -\theta_c$ où $b = q$ et où c et α sont donnés en x, y, z, q par les équations des droites D. Mais comme cette équation définit aussi c en p, q seules, l'expression $z - px - qy = c\theta_c - \theta$ se réduit à une fonction F de p, q seuls et l'équation de Clairaut $z - px - qy = F(p, q)$ a des droites pour caractéristiques et s'intègre.

b. Une *congruence* (α) du complexe (C) s'obtient en posant $Y - y = \alpha(X - x)$, où α est fonction de b et c. Une nappe focale est $X = x = c$; c'est (S). L'autre nappe est donnée par

$$(X - c)[\alpha_b \theta_{c^2} - \alpha_c(\theta_{bc} - \alpha)] + (\theta_{bc} - \alpha)^2 - \theta_{b^2}\theta_{c^2} = 0.$$

Si l'on se donne X en x, y, z ou en b, c et si l'on définit α par une relation $\omega(\alpha, b, c) = \text{const.}$, on a pour ω une équation linéaire voisine de (4) (*loc. cit.*, p. 1223), *du second degré en* α à laquelle s'appliquent les conclusions indiquées : existence d'intégrales polynomes en α de degré quelconque, etc. *Si l'on veut*, par exemple, *que la surface moyenne de* (α) *soit un plan*, pour lequel on peut prendre le plan des y, z, il faudra $X + c = 0$ et *l'équation en* ω *est identique à* (4) [on permute b et c et change x en α]. On a deux problèmes de Géométrie *différents* conduisant à la même équation.

Si $\omega = \lambda\alpha + \mu$, on a $\lambda = f(b)\sqrt{c}$; la condition d'intégrabilité de μ donne : $4c^2 f''\theta_{c^2} + f\theta_{b^2} = 0$ pour déterminer θ et *les asymptotiques de* S *s'obtiennent par les quadratures* : $dc/c \pm 2\sqrt{f''/f}\, db = 0$.

II. *c.* Il s'agit de trouver les équations (A) $r + 2s\alpha + t\alpha^2 = 0$, (B) $\lambda^2(rt - s^2) + 1 = 0$ où α, λ dépendent de x, y, p, q qui possèdent *une seule intégrale première* : $V(x, y, p, q) = \varphi = \text{const.}$ [S. Lie a étudié les équations (A) et (B) qui s'intègrent *complètement* par la méthode de Monge.] Si les caractéristiques sont lignes asymptotiques des surfaces intégrales on a :

---

[1] Séance du 19 janvier 1948.

[2] *Comptes rendus*, **225**, 1947, p. 1221.

$V_x V_p + V_y V_q = 0$ et cette équation s'intègre sous la forme

$$V = ax + by + c(bp - aq) - \Phi(a, b, c),$$

avec $V_a = x - cq - \Phi_a = 0$, $V_b = y + cp - \Phi_b = 0$, $V_c = bp - aq - \Phi_c = 0$, qui dépend d'une fonction arbitraire Φ de trois arguments. D'autre part V satisfait au système jacobien (J) $V_x - \alpha V_y = V_p - \lambda V_y = V_q + \alpha\lambda V_y = 0$, et l'on a : $V_x = a$, $V_y = b$ puis, après calcul, $V_p = bc$, $V_q = -ac$, d'où $b\alpha = a$, $\lambda = c$. Les intégrales de $V = \varphi$ satisfont *à la fois* à (A) et à (B). Si l'on cherche les caractéristiques de $V = \varphi$ dans le domaine a, b, c on trouve d'abord l'intégrale $\Sigma = a\Phi_a + b\Phi_b - \Phi = \varphi$ qui est V et donne, par $d\Sigma = 0$, dc en da et db, puis deux relations $(cq + \Phi_a)(bda - adb) + \Phi_c(bdc - cdb) = 0$, $2\,abdq + q(bda - adb) - db\Phi_c = 0$ qui donnent db/da et dq/da *rationnels* en q et explicites, *si l'on résout en c l'équation* $\Sigma = \varphi$.

d. Les conditions d'existence du système jacobien (J) sont d'abord

$$\lambda(\alpha\alpha_y - \alpha_x) = \alpha\alpha_p + \alpha_q,$$

puis deux équations aux dérivées premières en λ, d'où deux équations du *second ordre* pour α, qui ont une intégrale commune avec une fonction arbitraire de *trois* arguments, donnée par $b\alpha = a$. En particularisant Φ, on aura des solutions moins étendues et dans le *domaine de rationalité* $[\alpha]$ la détermination de V est identique à l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre et présente les mêmes cas de réduction.

III. *Exemples.* — 1° L'étude directe de l'équation $f(y - p) + g(x + q) = \varphi$, où f et g sont arbitraires, donne pour les caractéristiques $y + p = \alpha$ et $x - q = \beta$; si l'on prend $\beta = \beta(\alpha)$ arbitraire, les surfaces intégrales s'obtiennent par la quadrature

$$dz = (\alpha - y)\,dx + (x - \beta)\,dy,$$

où α est défini en x, y par

$$f(2y - \alpha) + g(2x - \beta) = \varphi.$$

Cette dernière équation donne les asymptotiques $\alpha = \text{const.}$; les autres ont pour équation $d\beta\,dy - d\alpha\,dx = 0$.

2° Soit $2\Phi = c(a^2 - b^2)$; on trouve $c = (x^2 - y^2)^{1/2}(q^2 - p^2)^{-1/2}$, avec $a = cx - p$, $b = -cy - q$, d'où l'équation

$$\varphi = -(py + qx) + \sqrt{(x^2 - y^2)(q^2 - p^2)}.$$

Les caractéristiques sont $px + qy = \zeta$, $py + qx = \sigma$, qui n'est pas nouvelle car $\zeta^2 + \varphi^2 + 2\varphi\sigma = 0$, et pour la dernière $\theta = (\varphi + \zeta)\log(x + y) + (\varphi - \zeta)\log(x - y)$. Avec $\theta = \theta(\zeta)$, où θ est arbitraire, cette équation donne les asymptotiques des surfaces z définies par $2\,dz = (\zeta - \sigma)\,d\log(x + y) + (\zeta - \sigma)\,d\log(x - y)$. Les formules se simplifient en posant $x + y = e^u$, $x - y = e^v$.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'intégration des systèmes de Pfaff linéaires et homogènes à coefficients constants.* Note [1] de M. **Ernest Vessiot.**

1. Dans une Note présentée à l'Académie, M. Saltykow [2] a donné une méthode d'intégration des systèmes de Pfaff linéaires et homogènes

$$(\text{I}) \qquad dy_k = A^{(\lambda)}_{k\alpha} y_\alpha \, dt_\lambda \qquad (k, \alpha = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda = 1, 2, \ldots, p),$$

à coefficients A constants. Le principe de cette méthode consiste à chercher, comme on le fait dans la méthode classique relative au cas $p = 1$, n solutions particulières, exponentielles, qui seront ici de la forme

$$(\text{II}) \qquad y_k = c_k e^{\theta_\lambda t_\lambda} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda = 1, 2, \ldots, p),$$

où les c_k et les θ_i sont des constantes. M. Saltykow trouve pour les déterminer, les p *équations caractéristiques*

$$(\Theta_i) \qquad \text{dét}\,|A^{(i)}_{kj} - E_{kj}\theta_i| = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p;\ k, j = 1, 2, \ldots, n)$$

(où E_{kj} est, suivant l'usage, égal à zéro pour $k \neq j$ et à 1 pour $k = j$), qui donneront les θ_i, et les p systèmes de n équations du premier degré

$$(S_i) \qquad (A^{(i)}_{k\alpha} - E_{k\alpha}\theta_i) c_\alpha = 0 \qquad (k, \alpha = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, p),$$

auxquelles les c_j devront ensuite satisfaire. Mais, pour que la méthode fut complète et que son succès fut assuré, il faudrait démontrer qu'à chacune des n racines (supposées simples), de l'une des équations Θ_i (Θ_1 par exemple) on pourra toujours associer une racine de chacune des autres de manière que les p systèmes S_i en $c_1, c_2, \ldots, c_n$ soient compatibles, et indiquer comment cela devra s'effectuer. C'est ce que je ferai en reprenant le problème d'intégration par une autre méthode.

2. Le principe de cette méthode consistera à chercher une transformation linéaire à coefficients constants

$$(2) \qquad z_k = c_{k\alpha} y_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, n),$$

---

[1] Séance du 19 janvier 1948.

[2] *Comptes rendus*, 225, 1947, p. 520.

Je modifie ici les notations de M. Saltykow, de manière à mettre en évidence les variables indépendantes $t_1, t_2, \ldots, t_p$ et les fonctions inconnues $y_1, y_2, \ldots, y_n$. D'autre part, j'emploie la notation abrégée $X_\alpha Y_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, m$), usitée dans le calcul tensoriel, pour désigner une somme $\sum_{\alpha=1}^{m} X_\alpha Y_\alpha$. Pour plus de clarté, j'emploierai les lettres grecques pour les indices de sommation. Bien entendu, X^α_α ($\alpha = 1, 2, \ldots, m$) aura une signification analogue.

qui ramène le système (1) à la forme canonique

(3) $dz_k = z_k dT_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, avec $T_k = \theta_{\lambda k} t_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, p)$.

Cela équivaut à dire que cette transformation devra réduire chacun des p systèmes

$$(\Sigma_i) \quad \frac{\partial y_k}{\partial t_i} = A^{(i)}_{k\alpha} y_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n; i = 1, 2, \ldots, p)$$

[en lesquels le système (1) se décompose] à la forme canonique

$$(\Sigma'_i) \quad \frac{\partial z_k}{\partial t_i} = \theta_{ik} z_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n; i = 1, 2, \ldots, p).$$

Elle le fera pour le système Σ_i si les c_{kj} satisfont, pour chaque valeur de k, au système

$$(S'_i) \quad (A^{(i)}_{\alpha j} - E_{j\alpha}\theta_{ij}) c_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \quad (j = 1, 2, \ldots, n; i = 1, 2, \ldots, p),$$

ce qui exige que θ_{ij} soit, quel que soit j, une racine de l'équation caractéristique Θ_i.

Si cette racine est simple, le système S'_i donnera, pour les c_j, une seule solution (à un facteur commun près) [3]. Nous supposerons que l'une au moins des équations Θ_i, Θ_1 par exemple, n'a que des racines simples. Nous obtiendrons alors une transformation (2) réduisant Σ_1 à la forme canonique Σ'_1 en prenant pour les $\theta_{1,k}$ les n racines différentes de Θ_1.

Il importe de remarquer que les formes linéaires

$$L_k = c_{k\alpha} y_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

ainsi obtenues seront linéairement indépendantes. L'intégration de Σ'_1 donne en effet

$$(4) \quad z_k = C_k e^{\theta_{1k} t_1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

les C_k étant, par rapport à t_1, des constantes arbitraires : de sorte que l'on aura, pour chaque solution du système (Σ_1),

$$(5) \quad L_k = C_k e^{\theta_{1k} t_1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

les C_k ayant pour chacune des valeurs particulières appropriées. Or, il y aura toujours des solutions pour lesquelles aucune des formes L_k ne s'annulera, et par conséquent pour lesquelles aucune des constantes C_k des équations (5) ne sera nulle. Si donc il existait une relation linéaire et homogène à coefficients non tous nuls entre les L_k, il en existerait une aussi entre les exponentielles $e^{\theta_{1k} t_1}$: ce qui est impossible, les θ_{1k} étant tous différents. Cela prouve que les L_k sont bien indépendantes, et par conséquent que les équations (2) dont elles sont les seconds membres seront celles d'une véritable transformation.

(3) Nous pouvons supposer que les c_j seront, dans cette solution, des constantes.

Soit $\mathcal{T}$ cette transformation. Elle a été calculée de manière à ramener le système Σ_1 à sa forme canonique Σ'_1 ; mais elle réduira en même temps chacun des autres systèmes Σ_i à sa forme canonique Σ'. Cela tient à ce que le système (1) est par hypothèse complètement intégrable ainsi que cela a été supposé implicitement dans le numéro 1, et qu'il en est par suite de même du système qui en résulte par notre transformation $\mathcal{T}$. Or les conditions d'intégrabilité du système (1) sont

$$(6)\quad A^{(h)}_{\alpha j}A^{(i)}_{k\alpha}-A^{(i)}_{\alpha j}A^{(h)}_{k\alpha}=0 \quad (\alpha=1, 2, \ldots, n); \quad (k, j=1, 2, \ldots, n); \quad (h, i=1, 2, \ldots, p).$$

Considérons, pour les systèmes transformés, dans le premier desquels on aura

$$A^{(1)}_{kj}=E_{kj}\theta_{1k} \qquad (k, j=1, 2, \ldots, n),$$

celle de ces conditions (6) pour lesquelles $h=1$ et $i=2, 3, \ldots, p$. Elles se réduisent à

$$(\theta_{1j}-\theta_{1k})A^{(i)}_{kj}=0 \qquad (k, j=1, 2, \ldots, n; i=2, 3, \ldots, p),$$

d'où il résulte que, les θ_{1k} étant tous différents, les coefficients $A^{(i)}_{kj}$ seront nuls (pour $i=2, 3, \ldots, p$) si k est différent de j. Si donc on pose $A^{(i)}_{jj}=\theta_{ij}$ (pour $i=2, 3, \ldots, p$ et $j=1, 2, \ldots, n$), les systèmes $\Sigma_2, \ldots, \Sigma_p$ se trouveront bien réduits respectivement aux formes canoniques $\Sigma'_2, \ldots, \Sigma'_p$.

La forme canonique (3) ainsi obtenue pour le système (1) s'intègre immédiatement et de son intégrale générale on déduira, par la transformation $\mathcal{T}$, celle du système (1). Dans cette dernière seront en évidence les n solutions particulières II de ce système dont il s'agissait de démontrer l'existence et de donner un mode de calcul.

L'existence de ces solutions étant ainsi établie, on pourra, suivant l'idée de M. Saltykow, les calculer par la méthode des coefficients indéterminés, mais en opérant comme il suit. Pour l'une quelconque d'entre elles, θ_1 sera l'une des racines, supposées différentes, de l'équation caractéristique Θ_1 et les c_k se calculeront au moyen du système S_1 ainsi déterminé. Enfin, chacun des θ_i, pour $i>1$, se tirera de l'une des équations du système S_i où l'on aura remplacé les c_k par les valeurs trouvées. On pourra employer l'une quelconque de ces équations sous la réserve que le coefficient de θ_i dans cette équation (qui sera l'une des c_k) ne soit pas nul.

3. Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que l'une au moins des équations Θ_i n'avait que des racines simples, mais on peut traiter d'une manière analogue, en se servant de notions fondamentales, relatives aux transformations infinitésimales, tout système (1) complètement intégrable. La théorie des transformations linéaires fournira, pour chacun de ces systèmes, une forme canonique appropriée.

ÉLECTRONIQUE. — *Étude des cibles minces légèrement conductrices.* Note [1] de M. **René Barthélemy.**

L'utilisation récente, dans les analyseurs de télévision d'origine américaine, d'une cible mince à deux faces actives, a suscité un certain nombre de propositions.

Le but de la présente Note est d'attirer l'attention sur les conditions et les limites de fonctionnement de telles cibles dont j'avais proposé l'emploi en 1931. J'avais, à ce moment, établi une théorie sommaire, valable pour un cas spécial. Il s'agissait d'utiliser un faisceau cathodique mobile, porteur de la modulation de télévision, pour charger les différents points d'une paroi d'un tube dont la face extérieure était considérée comme conductrice. L'étalement de la charge dans la paroi reste insignifiant, à condition que le diamètre du faisceau cathodique soit nettement supérieur à l'épaisseur de cette paroi. En effet, le courant passant par un élément de surface, *dit point d'image,* déterminé par la surface de l'impact, est sensiblement une fraction du courant total 1 égale à $1/[1+(x^2/e^2)]$ (x, distance de l'élément à l'impact; e, épaisseur du verre).

Ainsi, pour le point immédiatement voisin de celui de l'impact et un faisceau de diamètre égal à 10 fois l'épaisseur e, le rapport est de l'ordre de 100, ce qui assure un excellent contraste dans la reproduction éventuelle d'images. Cette approximation, qui suppose une paroi conductrice, ne fait intervenir que les résistances internes et n'est plus valable lorsque les deux faces sont isolées.

Considérons, en effet, le cas de l'*image-Orthicon* américain, dont nous avions d'ailleurs proposé un modèle en 1935 [2]. Une image électronique d'une photo-cathode est projetée en permanence sur la cible mince semi-conductrice, et l'analyse s'effectue sur l'autre face de cette cible par un faisceau cathodique à électrons lents, à la cadence d'un balayage complet en 1/25 de seconde. Supposons, pour simplifier, n'utiliser qu'une surface lumineuse correspondant à la dimension d'un point-image; elle fournit un filet d'électrons, qui est focalisé sur la cible, et qui apporte un courant constant I sur la section s_0 de diamètre AB (*fig.* 1).

En réalité par suite de l'émission secondaire, les électrons qui partent sont plus nombreux que ceux qui arrivent, et le potentiel croît, en AB.

La faible résistance ρ_1, qui existe entre les deux faces AB et CD, permet de considérer le volume $s_0 e$ comme équipotentiel et nous admettons qu'à partir de la surface latérale de ce cylindre élémentaire, l'écoulement s'effectue radialement, pour atteindre les bords de la cible, fixés à un potentiel déterminé. Lorsque le

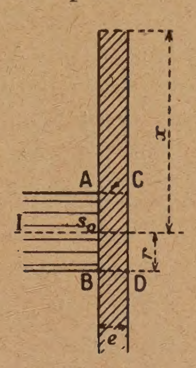
(1) Séance du 12 janvier 1948.
(2) Brevet Français n° 805 827.

régime est établi, la répartition des potentiels sur la cible est uniquement déterminée par la chute ohmique. A une distance x de l'impact, la résistance s'exprime par

$$R_x = \frac{\rho_0}{2\pi e} L\left(\frac{x}{r}\right),$$

ρ_0 est la résistivité du verre. La loi de variation du potentiel montre un étalement inadmissible dans une image de télévision.

Il faut donc rechercher si, dans la période d'établissement, limitée à 1/25 de



seconde, une meilleure distribution due à la capacité répartie peut être obtenue. Il y a lieu de distinguer l'effet de la capacité interne du milieu diélectrique, de coefficient 4 environ, que constitue le verre de la cible, et l'effet des capacités externes (entre cible et électrodes). En partant toujours de l'hypothèse du petit cylindre central équipotentiel, on montre aisément que la capacité qui existe entre ce volume et une couche circulaire, située à une distance x, a pour valeur

$$C_x = \frac{Ke}{2} \frac{1}{L\left(\frac{x}{r}\right)}.$$

Au temps zéro (application de l'intensité I), la répartition des potentiels est la même que celle donnée par la résistance seule, elle ne varie pas ensuite, car tous les circuits élémentaires, constitués par les résistances et les capacités internes, ont une même constante de temps

$$\tau = R_x C_x = \frac{K\rho_0}{4\pi}.$$

Avec les valeurs connues de K et de ρ_0, on obtient un chiffre de l'ordre de 2/100 de seconde. (Mon Confrère, M. Darrieus, m'a d'ailleurs fait remarquer que cette formule peut être déduite directement de la deuxième équation de Maxwell.)

L'étalement reste donc prohibitif. Un fonctionnement satisfaisant d'une telle cible n'est obtenu que par l'intervention de la capacité *cible-masse* C'. Celle-ci

serait très insuffisante si elle était limitée au seul condensateur formé par les parois de la cible et les revêtements du tube. Fort opportunément, la nécessité de capter les électrons secondaires émis par l'image électronique, a conduit les laboratoires américains à disposer une grille très fine à moins de 3/100 de millimètre de la cible. La cible et les différents éléments capacitifs peuvent être assimilés à une ligne dont les capacités par unité de longueur, croissent avec la distance x de l'origine. La valeur du potentiel V_m d'un point de la cible en fonction de x et t est alors obtenue par une relation analogue à celle des télégraphistes, en écrivant dans le deuxième membre les expressions des résistance et capacité unitaires, fonctions de x.

Un calcul plus simple, limité à des cellules de dimensions finies, qui sont celles qui caractérisent la qualité de l'image, montre que, pendant le temps d'intégration de 1/25 de seconde, le potentiel, d'un *point-image* contigu à la section de l'impact, n'atteint que le 1/10 de la valeur du potentiel central, dans le cas d'une analyse à 450 lignes.

C'est à peu près la limite admise en télévision pour le contraste *blanc-noir*. Une analyse de finesse supérieure exigerait une augmentation des capacités C'. Les conditions de fabrication deviendraient très délicates car la distance grille-cible serait divisée environ par 8 pour les images à 1000 lignes.

On peut agir aussi sur la résistance R, pour conserver la même constante de temps RC' (environ 2/10 de seconde) quelle que soit la définition. On est alors conduit à diminuer l'épaisseur du verre, qui ne dépasse pas actuellement 5^{μ}.

Ces obstacles pourront probablement être surmontés par d'autres dispositions.

PRINCIPES DES SCIENCES MATHÉMATIQUES. — *Problèmes. Synthèse globale.* Note de M. Georges Bouligand.

1. Ayant signalé des apports *non prédicatifs* du *non-fini* à l'Analyse ([1]) s'ajoutant à de très connus (notation d'éléments d'un *bien ordonné* pour des rangs toujours accrus), je reviens sur les problèmes dont la formulation précise a progressivement requis dans S_ι, au delà des processus finis, la *suite* N *des entiers*, le *continu linéaire* L avec les espaces succédanés, enfin divers *champs fonctionnels*. Ces types d'ensembles, à partir du second, émanent d'une intuition infirmée par l'expérience, cela sans fissure apparente. Sur N se greffent des problèmes de ce genre (abordés avec intrusion de L) :

Extrayant de N selon une loi fixée une succession indéfinie de suites régulières illimitées σ_n, en général non disjointes et prenant le complémentaire Γ dans N de la réunion des σ_n (*crible d'Ératosthène général*), trouver $\varphi(n)$, $\Phi(n)$ d'un type assigné, lesquelles encadrent au mieux le nombre des éléments de Γ

([1]) *Comptes rendus*, **224**, 1947, p. 1747 et **225**, 1947, p. 780.

inférieurs à $n+1$. Bien déterminée, la répartition sur N de ces éléments est en général *sans loi* : c'est encore du non-prédicatif provenant du non-fini.

En géométrie et en analyse, L intervient en maint problème (aire du cercle, logarithme d'un nombre rationnel, somme d'une série à termes rationnels, ...) sans se laisser construire en totalité au moyen d'un ensemble dont la puissance serait (puissance N). Pur concept de S_t, la notion de L exige un acte de pensée irréductible. Avec Beppo Levi [2], on peut voir dans N et L les *ensembles primitifs* de deux *domaines déductifs* distincts $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{L}$; et dans $\mathfrak{L}$ une *extension naturelle* de $\mathfrak{N}$, car les éléments de L dérivent de $\mathfrak{N}$ par un *processus d'approximation* formulable en termes de $\mathfrak{N}$. Même situation au passage de $\mathfrak{L}$ à $\mathfrak{F}$, nouveau domaine déductif (analyse fonctionnelle) dont l'ensemble primitif est celui des fonctions : $\mathfrak{F}$ est encore une *extension naturelle* de $\mathfrak{L}$. Si je reprends le problème de Dirichlet pour la sphère sans fixer en fait les valeurs périphériques, j'en réfère à $\mathfrak{F}$. Ainsi la construction qui le résout à ce degré de généralité livre à S_t une vérité moindre que celle du cas, lié à $\mathfrak{L}$, où ces valeurs étant celles d'un polynome, on calcule les coefficients du polynome harmonique solution au moyen d'un système linéaire. Ainsi, chaque énoncé livré à S_t par un groupement de problèmes, devient une *souche* disponible à des énoncés particuliers issus d'un sous-groupement et atteignant un niveau de vérité meilleur. L'idée des niveaux de vérité est donc appuyée par la théorie de B. Levi, indépendante du dualisme *problèmes, synthèse globale*, mais appréciant diversement les démonstrations d'un théorème, tel celui de d'Alembert, selon le domaine déductif admis. L'Analyse générale se libère de la stratification $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{F}$: son ensemble primitif reste celui des fonctions, en ralliant à ce terme les ensembles et correspondances les plus larges. Devant cette fusion des catégories, reste seule efficace la forme axiomatique livrant des énoncés au niveau minimum de vérité : ils gardent toutefois, et c'est l'essentiel, le rôle de souches disponibles.

2. A supposer que S_t élague progressivement les notions et énoncés qui n'ont pas été construits à partir d'une base jugée intuitive (soit par exemple $\mathfrak{N}$), S_t tend vers la coordination de résultats venus des problèmes : d'où un *intuitionisme*. Ce point de vue est moins fécond que l'analyse classique, où la recherche même de raisonnements par l'absurde, permise dans S_t, pose des problèmes.

Par exemple, pour valider dans S_t une conclusion aussi générale que possible sur la solidarité, pour trois dimensions, entre la conservation des angles et celle des sphères, on tentera, partant de cinq points cosphériques à transformés non cosphériques, d'en déduire un point P limite de deux suites $\{P'_i\}\{P''_j\}$ ayant

---

[2] *Fund. Math.*, **23**, 1934, p. 63 et aussi, p. 75, annexe de T. Viola. Pour chaque domaine déductif, on approche *ad libitum* des éléments de l'ensemble primitif par le domaine qui précède, selon un principe général (*loc. cit.*, p. 72), énoncé par le même (*Math. Ann.*, **90**, 1923, p. 170).

chacune en P une demi-tangente unique et où soit altérée cette unicité ou sinon la mesure d'angle.

3. Prenant un problème où est demandé un élément d'une catégorie K soumis aux conditions C, le recours à une notion assignée ν de S_t pour trouver des solutions peut produire divers effets, car ν peut ne pas être universelle dans K, être valable dans une $K' \supset K$ (ou dans une K' chevauchant sur K). Il peut arriver que le recours à ν donne des solutions dans une $K' \supset K$: est alors livré à S_t un *énoncé de prolongement* en vertu duquel une propriété, vraie sur un ensemble, subsiste sur un autre plus large.

Telle la propriété qui, même pour une $f'(x)$ continue sans plus, permet de maintenir à une courbe $y^2 f'(x) = \text{const.}$ le rôle d'asymptotique sur la surface $z = y f(x)$ (3).

Quand ν n'est pas universelle dans K, elle pourra ne donner qu'une partie des solutions, dont l'ensemble ne peut se déduire par aucun moyen *prédicatif*.

Tels le problème des surfaces isométriques, ou de la recherche d'intégrales d'une équation linéaire, type de Fuchs, par le recours à la notion ν de série entière.

L'idée de prolongement peut encore viser isolément une solution introduite par ν, mais tronquée par elle (comme il advenait à l'instant pour l'ensemble des solutions).

C'est le cas de $y' = f(x, y)$ avec f holomorphe, si ν est la notion *série entière*. Autre exemple : soit connu, pour $f(x, y, z, p, q) = 0$, un morceau *d'intégrale paratingente* (= IP), c'est-à-dire de surface σ dont les paratingentes en chaque point sont dans un plan, tangent au cône élémentaire : bordé à des arêtes de rebroussement, un tel morceau est inclus en des surfaces intégrales Σ au sens de Cauchy. Soit à reconstituer l'une à partir de σ. On y parvient avec la seule notion de IP pour quatre dimensions, quand $f = 0$ équivaut à un système T de deux équations donnant p, q en x, y, z, u avec z, u fonctions inconnues de x, y. Cela conduit à exprimer la compatibilité de $dz = p\,dx + q\,dy$ après remplacement de u dans p, q par une solution d'une équation (e) linéaire en u_x, u_y, u_z, introduite par cette compatibilité. Sous conditions de régularité remplies par T, toute solution $u = \bar{u}$ de (e) ayant une sous-variété s, transverse à ses lignes caractéristiques et à paratingent partout plan, est une IP dans l'espace (x, y, z, u); σ est alors projection sur (x, y, z) d'une portion ϖ de $u = \bar{u}$, donnée par un problème de Cauchy, à partir d'une sous-variété (type s) de $u = \bar{u}$ livrée par σ, T. Par la notion de IP, un prolongement Π de ϖ s'obtient immédiatement, ce qui se transmet à (x, y, z) par projection, moyennant l'intégration de $dz = \bar{p}\,dx + \bar{q}\,dy$, qui sur $u = \bar{u}$ s'effectue selon la notion IP. Cette paramétrisation de $f = 0$, qui en éclaire l'intégration, souligne

(3) *Bull. Soc. Math. de France*, 64, 1946, p. 31.

l'importance des ensembles de (x, y, z) obtenus en y projetant ceux d'une variété V de type dimensionnel > 3, astreints dans V aux hypothèses d'un des lemmes d'univocité.

M. **Emmanuel de Margerie** fait hommage à l'Académie de deux notices extraites du *Bulletin de la Section de Géographie du Comité des travaux historiques et scientifiques*, et intitulées *Trois moments dans l'histoire de l'étude des Alpes Suisses : de Saussure, Studer, Alb. Heim*, et *L'œuvre d'Henri Béraldi, historien du Pyrénéisme*.

M. **Carl Størmer** adresse une reproduction photographique d'une traînée météorique observée à Askim, Norvège, le 10 octobre 1946.

ÉLECTIONS.

Par la majorité absolue des suffrages, M. **André Boivin** est élu Correspondant pour la Section d'Économie rurale, en remplacement de M. *Henri Vallée*, décédé, et M. **Theodor Mortensen** est élu Correspondant pour la Section d'Anatomie et Zoologie, en remplacement de M. *Édouard Chatton*, décédé.

PLIS CACHETÉS.

M. **Léon Velluz** demande l'ouverture d'un pli cacheté reçu dans la séance du 17 mars 1947 et enregistré sous le n° 12290.

Ce pli, ouvert en séance par M. le Président, contient une Note intitulée *Méthylcétone apparentée à l'œstrone*, par MM. *L. Velluz* et *G. Muller*.

(Renvoi à la Section de Chimie.)

CORRESPONDANCE.

M. le **Ministre de l'Éducation Nationale** invite l'Académie à lui présenter une liste de deux candidats à chacun des postes de Directeur de l'*Observatoire du Puy-de-Dôme* et de celui *du Pic du Midi*.

(Renvoi à la Commission des Instituts de Physique du globe : Sections d'Astronomie et de Physique générale et Secrétaire perpétuel pour les Sciences mathématiques.)

L'**Institut expérimental italien Lazzaro Spallanzani**, de Milan, signale l'expérience qu'il vient de faire sur des vaches, de fécondation artificielle au moyen de matériel séminal transporté par avion des États-Unis.

Le Secrétaire général de l'**Union Astronomique Internationale** annonce que

la prochaine Assemblée générale de cette Union aura lieu à Zurich, du 11 au 18 août 1948 et invite l'Académie à s'y faire représenter.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° Programme du *soixante-quatorzième Congrès des Sociétés Savantes de Paris et des Départements*, qui se tiendra à Paris (Faculté de Médecine), du 30 mars au 3 avril 1948.

2° Walter Robyns. *Tentamen Monographiæ Vangueriæ. Generumque Affinium*. — *Flore Agrostologique du Congo Belge et du Ruanda-Urundi*, tomes I et II, et divers tirages à part relatifs à ses travaux de Botanique.

3° *Bulletin of the Bureau of Mines and the Geological Survey in Indonesia*. Volume I, n° 1.

4° University Library of Oslo. *Norwegian Bibliography. A brief survey.*

5° *The University Library. Oslo. A brief survey of its history collections and building.*

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions d'Hermite dérivées de l'exponentielle quadratique $e^{-\varphi(x_i)}$ et quelques équations intégrales.* Note [1] de M. **Albert Tortrat**, présentée par M. Joseph Pérès.

Je rappelle les notations suivantes :

$\varphi(x_i)=\alpha_{ij}x_ix_j$ est une forme quadratique définie positive de discriminant Δ. Les $\xi_i=(1/2)(\partial\varphi/\partial x_i)$ sont les variables conjuguées.

$$\psi(\xi_i)=\varphi(x_i)=\beta_{ij}\xi_i\xi_j$$

est la forme polaire réciproque.

$$\gamma_1^\varphi=e^{\varphi(x_i)-\varphi(x_i-h_i)}=\sum_0^\infty \Pi\frac{h_i^{n_i}}{n_i!}a_{n_i}\mathrm{H}_{n_i}^\varphi(x_i) \qquad \frac{1}{a_{n_i}^2}=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\Delta}}\Pi\, 2^{n_i}n_i!$$

et

$$\gamma_2^\varphi=e^{\varphi(x_i)-\varphi\left(x_i-\frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial k_i}\right)}=\sum_0^\infty \Pi\frac{k_i^{n_i}}{n_i!}a_{n_i}\mathrm{G}_{n_i}^\varphi(x_i)$$

sont les fonctions génératrices des deux suites de polynomes d'Hermite, orthogonales l'une à l'autre sur l'intervalle $(-\infty,+\infty)$ relativement au facteur $e^{-\varphi(x_i)}$.

Les deux suites $\mathrm{H}_{n_i}(x_i)e^{-[\varphi(x_i)/2]}$ et $\mathrm{G}_{n_i}(x_i)e^{-[\varphi(x_i)/2]}$ forment chacune un système complet de fonctions.

Les premiers polynomes, H_{n_i} sont les fonctions propres de l'équation

(1) Séance du 5 janvier 1948.

intégrale homogène de noyau

$$\frac{\Delta}{\pi^{\frac{n}{2}}\sqrt{\Delta_\zeta}}\, e^{-\tau(\tau_i\eta_i - t_i\xi_i)} = {}_{11}\mathrm{L}(x_i, y_i, \tau_i, t_i).$$

$\tau(u_i)$ étant la forme polaire réciproque de $\zeta(x_i) = \alpha_{ij}(\tau_i\tau_j - t_i t_j)x_i x_j$ et $\eta_i = (1/2)(\partial\varphi/\partial y_i)$.

Les valeurs propres sont $\Pi(\tau_i/t_i)^{n_i}$. Les limites d'intégration sont $(-\infty, +\infty)$ pour toutes les r variables. Le noyau ${}_{11}\mathrm{K} = {}_{11}\mathrm{L}\, e^{[\varphi(y_i)-\varphi(x_i)]/2}$ a pour fonctions propres les $\psi^\varphi_{n_i} = e^{-[\varphi(x_i)/2]}\mathrm{H}^\varphi_{n_i}$ tandis que le noyau symétrique de celui-là a pour fonctions propres, les $e^{-[\varphi(x_i)/2]}\mathrm{G}^\varphi_{n_i} = \chi^\varphi_{n_i}$ formant une suite orthogonale à la première.

On vérifie que

$${}_{11}\mathrm{L} = \sum_0^\infty \Pi\left(\frac{t_i}{\tau_i}\right)^{n_i} \mathrm{G}^\varphi_{n_i}(y_i)\,\mathrm{H}^\varphi_{n_i}(x_i) \qquad \text{pour} \quad \left|\frac{t_i}{\tau_i}\right| < \varepsilon \quad (^2)$$

conformément aux théorèmes généraux de Hilbert [3]. ${}_{11}\mathrm{L}$ vérifie par rapport aux variables $u_i = \tau_i\eta_i - t_i\xi_i$ le système d'équations aux dérivées partielles

$$(1) \qquad \sum_j \alpha_{ij} t_i t_j \frac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial u_i \partial u_j} + 2t_i \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial t_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

qui se rattache au système vérifié par les G^ψ.

Par rapport aux τ_i, ${}_{11}\mathrm{L}$ vérifie le système

$$\sum_j \alpha_{ij}\tau_i\tau_j \frac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial u_i \partial u_j} - 2\tau_i \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \tau_i} = 0,$$

adjoint au précédent dans lequel on aurait remplacé t_i par τ_i. On peut ainsi appliquer au cas de r variables une méthode due à Hilbert et utilisée par Mme Lebedeff [*Die Theorie der Integral gleichungen in Anwendung auf einige Reihenentwicklungen* (*Math. Ann.*, Bd. 64)] dans le cas des polynomes à une variable de Hermite, Laguerre, pour démontrer certaines propriétés d'un noyau vérifiant le système (1).

Pour $t_1 = \ldots = t_r = t$, $\tau_i = 1$, ${}_{11}\mathrm{L}$ prend la forme $[\sqrt{\Delta}\, e^{-\varphi(y_i - tx_i)/1-t^2}]/[\pi^{n/2}(1-t^2)^{n/2}]$ et

$${}_{11}\mathrm{K} = e^{\frac{\varphi(y_i)-\varphi(x_i)}{2}}\,{}_{11}\mathrm{L} = \frac{\sqrt{\Delta}}{[\pi(1-t^2)]^{\frac{n}{2}}}\, e^{\frac{4t\varphi(x_i, y_i) - (1+t^2)[\varphi(x_i) + \varphi(y_i)]}{2(1-t^2)}}$$

---

(2) Il y a convergence absolue dans un domaine des t_i assez petit entourant l'origine, pour des t_i donnés.

(3) Théorèmes généraux non applicables ici car le noyau ${}_{11}\mathrm{L}$, pas plus que ${}_{11}\mathrm{K}$, n'est borné; ces noyaux sont seulement de carrés sommables n fois par rapport aux x_i, ou n fois par rapport aux y_i.

est symétrique. Les $H_{n_i} e^{-(\varphi/2)}$ comme les $G_{n_i} e^{-(\varphi/2)}$ sont fonctions propres, mais il y a dégénérescence et tout H_{n_i} est orthogonal à un H ou un G dont la somme des indices n_i est différente. Il est facile d'orthogonaliser la suite entière en prenant des combinaisons linéaires convenables des H_{n_i} de même somme d'indices. On doit remarquer et l'on vérifie directement que la somme des $r(r+1)\ldots(r+\nu-1)/\nu!$ H_{n_i} différents avec $\Sigma n_i = \nu$ est ainsi invariante dans un changement linéaire sur les x_i gardant invariante la forme φ.

Relation d'itération :

$$\int_2 \cdots \int {}_{11}L(x_i, y_i, \tau'_i; t'_i)\, {}_{11}L(y_i, z_i, \tau_i, t_i)\, dy_i = {}_{11}L(x_i, z_i, \tau_i\tau'_i; t_i t'_i).$$

On obtient pareillement les noyaux de transformations intégrales faisant passer de

$$H^{\varphi}_{n_i} \quad \text{à} \quad \Pi\left(\frac{t_i}{\tau_i}\right)^{n_i} G^{\psi}_{n_i} \qquad \text{ou de} \qquad H^{\varphi}_{n_i} \quad \text{à} \quad \Pi\left(\frac{t_i}{\tau_i}\right)^{n_i} G^{\varphi}_{n_i},$$

et leurs développements en série.

Ils vérifient des systèmes d'équations similaires. En particulier pour

$$t_1 = \ldots = t_2 = t, \qquad \tau_i = 1,$$

le premier vaut

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{[\pi(1-t^2)]^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{2t x_i y_i - \varphi(y_i) - t^2 \psi(x_i)}{(1-t^2)}},$$

et pour $t = i$ on a la transformation de Fourier qui change

$$e^{-\frac{\varphi(y_i)}{2}} H^{\varphi}_{n_i}(y_i) \quad \text{en} \quad i^{\Sigma n_i} e^{-\frac{\psi(x_i)}{2}} G^{\psi}_{n_i}(x_i) = \frac{i^{\Sigma n_i}}{\sqrt{\Delta}} H^{\varphi}_{n_i}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right) e^{-\frac{\varphi(x_i)}{2}}.$$

Le deuxième vaut dans le cas général

$$\frac{\Delta}{\pi^{\frac{n}{2}}\sqrt{\Delta_{\zeta'}}} e^{-\tau'(\tau_i \eta_i - t_i x_i)} \qquad \text{avec} \quad \zeta' = \varphi(\tau_i x_i) - \psi(t_i x_i) = (\alpha_{ij}\tau_i\tau_j - \beta_{ij} t_i t_j) x_i x_j.$$

τ' en est la forme réciproque.

FONCTIONS SPÉCIALES. — *Sur les développements en séries de Bessel des fonctions de Mathieu associées de période $2s\pi$.* Note (¹) de M. **Robert Campbell**, présentée par M. Joseph Pérès.

On connaît depuis Goldstein (²) les développements des fonctions de Mathieu en série de fonctions de Bessel. Bickley (³) a souligné l'intérêt qu'ils présentent

---

(¹) Séance du 17 novembre 1947.

(²) *Trans. Cambridge Philos. Society*, **23**, 1923-1928, p. 303.

(³) *Philosophical Magazine*, octobre 1940, p. 312.

pour les calculs numériques. Je propose ici une méthode qui permet d'obtenir de tels développements pour les intégrales périodiques de l'équation de Mathieu associée

$$\frac{d^2U}{d\xi^2} - 2\nu \operatorname{tg}\xi \frac{dU}{d\xi} + (a + k^2 f^2 \sin^2\xi)U = 0. \tag{1}$$

Si, en effet, on y fait le changement de variable : $fk\sin\xi = \mu$, elle devient

$$(\mu^2 - k^2 f^2)\frac{d^2U}{d\mu^2} + (2\nu + 1)\mu\frac{dU}{d\mu} - (a + \mu^2)U = 0. \tag{2}$$

Or l'équation de Bessel modifiée devient, elle, par le changement de fonction $I_p = z^\alpha y_p$,

$$z^2\frac{d^2y_p}{dz^2} + (2\alpha + 1)z\frac{dy_p}{dz} - (z^2 + p^2 - \alpha^2)y_p = 0. \tag{3}$$

C'est l'équation (2) privée de son terme en $f^2k^2(d^2U/d\mu^2)$, en identifiant α à ν et a à $p^2 - \alpha^2$.

Or, la fonction $y_p = z^{-\nu}I_p$ possède une dérivée seconde par rapport à z qui est une fonction linéaire homogène et à coefficients constants de y_{p-2}, y_p, y_{p+2}. Comme on l'a fait [4] avec les fonctions de Legendre, on peut donc chercher une intégrale de (2) sous la forme $\Sigma\gamma_p y_p$; on voit tout de suite que p n'est pas entier en général, puisque la constante a se réduit à $(p-\nu)(p+\nu)$ si k tend vers zéro. Comme on sait que dans ce cas, elle vaut $(r/s)[(r/s)+2\nu]$ pour une intégrale de période $2s\pi$, p et r/s sont liés par la relation $p = \pm[(r/s)+\nu]$, et p n'est entier qu'exceptionnellement.

Les coefficients γ_j sont liés par des relations linéaires à trois termes qui sont en nombre infini aussi bien pour j positif que pour j négatif

$$\begin{cases} \gamma_j[j^2 - \nu^2 - a] = f^2k^2[A_j\gamma_{j-2} + B_j\gamma_j + C_j\gamma_{j+2}], \\ \text{avec} \begin{cases} A_j = \left(1+\frac{\nu}{j}\right)\left(1+\frac{\nu}{j+1}\right); \quad C_j = \left(1-\frac{\nu}{j}\right)\left(1-\frac{\nu}{j-1}\right), \\ B_j = \left(1+\frac{\nu}{j}\right)\left(1-\frac{\nu}{j+1}\right) + \left(1-\frac{\nu}{j}\right)\left(1+\frac{\nu}{j-1}\right). \end{cases} \end{cases} \tag{4}$$

Comme on l'a montré [5] dans un cas analogue, la condition de compatibilité de ce système s'obtient facilement sous la forme d'une équation transcendante contenant deux fractions continues infinies.

Dans le cas d'une fonction de période 2π, on sait que la fonction $pe_n^\nu(\xi)$ est développable sous la forme $\sum_0^\infty A_n^\nu C_n^\nu(\sin\xi)$, ($C_n^\nu$ polynome de Gegenbauer). Ce

(4) *Comptes rendus*, **222**, 1946, p. 269-271.
(5) *Comptes rendus*, **223**, 1946, p. 123-125.

développement est lié au précédent par la relation de Sonine ([6])

$$e^{\alpha z} = 2^{\nu}\Gamma(\nu)\sum_{0}^{\infty}(p+\nu)\,C_{p}^{\nu}(z)\,\alpha^{-\nu}I_{p+\nu}(\alpha)$$

qu'il suffit de porter dans l'équation intégrale ([7])

$$pe_{n}^{\nu}(\xi) = \lambda_{n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{kf\sin\theta\sin\xi}\cos^{2\nu}\xi\, p\, e_{n}^{\nu}(\theta)\, d\theta$$

pour obtenir $\left(\text{si } p\,e_{n}^{\nu}(\xi) = \sum_{0}^{\infty}\gamma_{p}y_{p}\right)$

$$\gamma_{p} = 2^{\nu}\Gamma(\nu)\,\lambda_{n}(p+\nu)\,A_{n}^{\nu}.$$

L'équation caractéristique ne fait intervenir qu'une des fractions continues infinies. C'est ce qu'on vérifie aussitôt sur les relations de récurrence.

Dans le cas où $(r/s)+\nu$ est entier, $I_{j} = I_{-j}$; on prendra comme élément du développement non une fonction I_{j}, mais une combinaison linéaire de I_{j} et de la fonction de Hankel correspondante.

En général, chaque élément de la série, soit

$$(fk\sin\xi)^{-\nu}I_{\nu+\frac{r}{s}+j}(fk\sin\xi),$$

comporte en facteur $(fk\sin\xi)^{r/s}$ qui, à condition de choisir les déterminations de la fonction $\sin^{r/s}\xi$ comme on l'a fait précédemment ([8]), est une fonction de ξ de période $2s\pi$.

Si l'on considère les fonctions de Mathieu ordinaires comme des développements en série de fonction de Bessel d'ordre entier, les développements précédents en constituent une généralisation directe, comme les fonctions $p\,e_{n}^{\nu}(\xi)$, développées en séries de fonctions de Legendre en étaient pour les fonctions de Mathieu développées en séries de Fourier.

On développe de même la deuxième solution de l'équation en série de fonctions

$$(fk\sin\xi)^{-\nu}K_{\nu+\frac{r}{s}+j}(fk\sin\xi) \qquad (K \text{ fonction de Neumann}).$$

Pour l'équation de Mathieu associée *modifiée*, la méthode s'applique en changeant les I en J. On peut en déduire les valeurs asymptotiques de ces fonctions, pour les grandes valeurs de $\eta = i\xi$. On retrouve alors comme cas particuliers les expressions asymptotiques trouvées pour les fonctions de Mathieu associées déjà calculées par la considération des équations intégrales ([7]).

([6]) *Math. Annalen*, XVI, 1879, p. 1 et 79.
([7]) *Comptes rendus*, **222**, 1946, p. 1069-1071.
([8]) *Comptes rendus*, **224**, 1947, p. 1322-1324.

TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE. — *Sur la cohomologie des espaces où opère un groupe : étude d'un anneau différentiel où opère un groupe.* Note (¹) de M. **Henri Cartan**, présentée par M. Élie Cartan.

Cette Note fait suite à la précédente (²); nous en conservons la terminologie et les notations.

1. Soient A un anneau différentiel normal, et $\mathcal{G}$ un groupe opérant dans A de manière que, pour tout $s \in \mathcal{G}$, $s(x+y) = s(x) + s(y)$, $s(xy) = s(x)s(y)$, $s(\delta x) = \delta(sx)$, $s(A^q) = A^q$. Définissons un anneau *bigradué* $\mathcal{A}$ comme suit : $\mathcal{A}^{p,q}$ est le groupe additif des fonctions $f(s_0, \ldots, s_p)$ à valeurs dans A^q $(s_0, \ldots, s_p \in \mathcal{G})$; le *produit* d'une $f(s_0, \ldots, s_p) \in \mathcal{A}^{p,q}$ et d'une $g(s_0, \ldots, s_m) \in \mathcal{A}^{m,n}$ est l'élément de $\mathcal{A}^{p+m,q+n}$ défini par la fonction $h(s_0, \ldots, s_{p+m}) = (-1)^{qm} f(s_0, \ldots, s_p)\, g(s_p, \ldots, s_{p+m})$. Dans l'anneau $\mathcal{A}$ ainsi défini, soient d_1 et d_2 les opérateurs définis, pour l'élément

$$a^{p,q} = f(s_0, \ldots, s_p) \in \mathcal{A}^{p,q},$$

par

$$d_1 a^{p,q} = f(s_1, \ldots, s_{p+1}) - f(s_0, s_2, \ldots, s_{p+1}) + \ldots + (-1)^{p+1} f(s_0, \ldots, s_p) \in \mathcal{A}^{p+1,q},$$
$$d_2 a^{p,q} = (-1)^p\, \delta\big(f(s_0, \ldots, s_p)\big) \in \mathcal{A}^{p,q+1}$$

[δ désigne l'opérateur différentiel dans A]. On est dans les conditions du n° 4 de la Note citée en (²) : l'opérateur $d = d_1 + d_2$, et le *degré total* $p + q$, définissent sur $\mathcal{A}$ une structure d'*anneau différentiel normal*.

2. Faisons opérer $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}$: le transformé de $f(s_0, \ldots, s_p)$ par $s \in \mathcal{G}$ sera, par définition, $s[f(s^{-1} s_0, \ldots, s^{-1} s_p)]$. Le sous-anneau $\mathcal{B}$ des éléments de $\mathcal{A}$ *invariants* par $\mathcal{G}$ est un anneau différentiel normal pour l'opérateur d et le degré total; il est en outre muni de deux structures graduées (définies par les $\mathcal{B}^{p,q} = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}^{p,q}$), dont chacune définit une structure *filtrée* (cf. n° 4 de la Note citée). L'anneau de cohomologie de $\mathcal{B}$, que nous noterons $\mathcal{H}(\mathcal{G}, A)$, est muni de la structure *graduée* définie par le degré total, et de deux structures *filtrées* dont chacune est compatible avec la structure graduée. Il est attaché intrinsèquement à l'anneau différentiel normal A *dans lequel opère* $\mathcal{G}$. Lorsque tous les éléments de A sont de degré zéro (et par suite $\delta = 0$), $\mathcal{H}(\mathcal{G}, A)$ est muni seulement d'une structure graduée, et se réduit à ce que Eilenberg et Mac Lane nomment l'*anneau de cohomologie de groupe* $\mathcal{G}$ *relativement à l'anneau* A (dans lequel opère $\mathcal{G}$).

3. Appliquons à l'anneau $\mathcal{B}$ les résultats de la Note citée (n° 4). Sa *première* structure filtrée définit une suite L. K.; on démontre que l'anneau E_2 de cette suite est isomorphe (canoniquement) à $\mathcal{H}(\mathcal{G}, \mathcal{H}(A))$, où $\mathcal{H}(A)$ désigne l'anneau de cohomologie (gradué) de A [noter que $\mathcal{G}$ opère dans $\mathcal{H}(A)$];

(¹) Séance du 19 janvier 1948.

(²) *Comptes rendus*, 226, 1948, p. 148.

c'est un anneau trigradué (pour p, q et $p+q$). A partir de l'anneau $E_2 \simeq \mathcal{H}(\mathcal{G}, \mathcal{H}(A))$, les opérateurs $\delta_r (r \geq 2)$ définissent de proche en proche les anneaux E_{r+1} et l'anneau E_∞; ils sont trigradués, et E_∞, pour la graduation p, est l'anneau gradué associé à l'anneau (filtré) $\mathcal{H}(\mathcal{G}, A)$. Ces résultats conduisent au théorème de topologie :

Théorème 1. — *Soit $\mathcal{E}$ un espace localement compact dans lequel opère un groupe $\mathcal{G}$. Si $\mathcal{H}(\mathcal{E})$ désigne l'anneau de cohomologie* [3] *de $\mathcal{E}$ (anneau dans lequel opère $\mathcal{G}$), il existe une suite* L. K. *qui commence à l'anneau trigradué $\mathcal{H}[\mathcal{G}, \mathcal{H}(\mathcal{E})]$ et qui constitue un invariant topologique de l'espace $\mathcal{E}$ muni du groupe d'opérateurs $\mathcal{G}$.* Cette suite L. K. possède toutes les particularités décrites au n° 4 de la Note citée en [2].

4. Revenons à l'étude algébrique de l'anneau $\mathcal{B}$. La considération de sa *deuxième* structure filtrée conduit à un résultat simple si l'on fait sur A et $\mathcal{G}$ les hypothèses suivantes :

α. L'anneau A est muni d'une topologie définie par des idéaux bilatères I_k (où k parcourt un ensemble K) et est complet pour cette topologie; on suppose évidemment $I_k = \sum_{q=0}^{\infty} I_k \cap A^q$, $\delta(I_k) \subset I_k$;

β. Il existe un endomorphisme continu λ du groupe additif de A, tel que $\lambda(A^q) \subset A^q$, et que, pour tout $k \in K$, on ait $s[\lambda(A)] \subset I_k$ sauf si s appartient à un sous-ensemble *fini* de $\mathcal{G}$ (ensemble qui dépend de k); en outre, pour tout $x \in A$, on suppose que

$$x = \sum_{s \in \mathcal{G}} s\lambda s^{-1} x \quad \text{(série convergente).}$$

Dans ces conditions, on montre que $\mathcal{H}(\mathcal{G}, A)$, muni de sa structure graduée, est isomorphe (canoniquement) à l'anneau de cohomologie (gradué) du sous-anneau B des éléments de A *invariants* par $\mathcal{G}$. Cet anneau $\mathcal{H}(B)$ est donc muni d'une structure *filtrée* [celle définie au n° 3 sur $\mathcal{H}(\mathcal{G}, A)$], telle que l'anneau gradué associé soit isomorphe à l'anneau terminal de la suite L. K. du n° 3. On peut en déduire le théorème de topologie :

Théorème 2. — *Soit $\mathcal{E}$ un espace localement compact, réunion dénombrable de compacts. Si un groupe $\mathcal{G}$ opère dans $\mathcal{E}$ et est discontinu sans point fixe, l'anneau de cohomologie* [3] *de l'espace quotient $\mathcal{E}'$ possède, outre sa structure graduée, une structure filtrée, et l'anneau gradué associé est isomorphe à l'anneau terminal de la suite* L. K. *dont parle le théorème* 1.

Ce théorème exprime des relations précises entre les anneaux de cohomo-

---

(3) Relatif à un anneau quelconque de coefficients, qui sera constamment sous-entendu dans ce qui suit.

logie de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{E}'$. On peut y rattacher les résultats antérieurement connus. Ajoutons que les théorèmes 1 et 2 valent non seulement pour la *cohomologie singulière* des espaces localement compacts, mais aussi pour la cohomologie au sens de Čech.

GÉOMÉTRIE. — *Sphères de Tücker d'un polyèdre harmonique.* Note (1) de M. **Victor Thébault**, présentée par M. Élie Cartan.

1. *Préliminaires.* — Tarry et Neuberg ont appelé *polyèdre harmonique* tout polyèdre (P) obtenu par une projection harmonique d'un polyèdre (P') (2). Les cercles circonscrits aux faces en sont les *faces circulaires*. Lorsque plusieurs petits cercles placés sur une même sphère (O, R) admettent un point L, dont les distances aux plans de ces cercles sont proportionnelles aux rayons des cercles correspondants, ce point sera un *second* point Lemoine.

Dans tout polyèdre harmonique (P), les faces Ci, $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$, sont des polygones harmoniques; les droites qui unissent le pôle d'une face à son point de Lemoine concourent en un point L qui est un *second* point de Lemoine des faces circulaires du polyèdre; les centres de similitude des faces considérées deux à deux appartiennent à une sphère décrite sur OL comme diamètre. (*Sphère de Brocard.*)

Les axes des faces circulaires rencontrent la sphère de Brocard en des points qui sont les sommets de cônes droits semblables construits sur les faces correspondantes.

Angle de Brocard. — Désignons par L_i les points où les axes des cercles C'_i rencontrent la sphère de Brocard. Ces axes passent par O, les angles OL_iL sont droits et les droites LL_i sont parallèles aux plans C_i. D'après la propriété fondamentale du point L, les cônes (L_i, C'_i) sont semblables. L'angle à la base V de ces cônes est *l'angle de Brocard* de (P), et l'on a, d'abord,

$$\operatorname{tg} V = \frac{d_i}{R_i} = \frac{d_i S_i}{R_i S_i} = \frac{3V}{\Sigma R_i S_i} = \operatorname{tg}\alpha \sqrt{1 - \frac{\overline{OL}^2}{R^2}},$$

ensuite,

$$\overline{OL}^2 = R^2\left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2 V}{\operatorname{tg}^2 \alpha}\right),$$

d_i, R_i, S_i, V et α désignant les distances de L aux plans C_i, les rayons des cercles C'_i, les aires des polygones des faces, le volume de (P) et l'angle à la base du cône de sommet O ayant pour base une face circulaire de (P').

2. *Sphères de Tücker de* (P). — Soient O_i les projections orthogonales du

(1) Séance du 19 janvier 1948.

(2) *Association française pour l'Avancement des Sciences,* 15, 1886, p. 22.

centre O de la sphère (O, R) sur des axes Δ_i perpendiculaires aux plans C_i menés par un point ω de la droite indéfinie LO, tel que $\overline{L\omega} : \overline{LO} = m$.

Si l'on considère les cônes droits de sommets O_i, d'axes Δ_i et d'angles aux sommets $2x_i$, ainsi définis,

$$\operatorname{tg} x_i = (1 - m)\operatorname{tg} V - m \sin A_i,$$

A_i étant les angles des plans C_i avec la sphère (O, R), les plans C_i découpent sur ces cônes des cercles c'_i, de rayons

$$r_i = R[(1 - m)\cos A_i \operatorname{tg} V - m \sin A_i],$$

situés sur une sphère (ω, σ) dont le carré du rayon

$$\sigma^2 = R^2[(1 - m)^2 \operatorname{tg}^2 V + m^2],$$

et réciproquement [*sphère de Tücker de* (P)].

Cas particuliers. — 1° Si $m = 0$, on a

$$\omega \equiv L, \qquad x_i = V, \qquad r_i = R\cos A_i \operatorname{tg} V, \qquad \sigma = R \operatorname{tg} V$$

et

$$r_1 : r_2 : r_3 : \ldots : r_n = \cos A_1 : \cos A_2 : \cos A_3 : \ldots : \cos A_n.$$

La sphère (L, σ) *est une* seconde *sphère de Lemoine* (ou des *cosinus*) *du polyèdre* (P).

2° Lorsque

$$m = \frac{1}{2}, \qquad L\omega = \frac{1}{2} LO, \qquad \sigma = \frac{R}{2} \operatorname{séc} V.$$

La sphère (ω, σ), *centrée au milieu de* LO, *est une* première *sphère de Lemoine du polyèdre* (P) *qui intercepte sur les plans des faces des cercles dont les diamètres*

$$D_i = \frac{R}{\cos V}\sin(A_i - V)$$

sont proportionnels à $\sin(A_i - V)$.

L'analogie avec le premier cercle de Lemoine d'un triangle et avec la première sphère de Lemoine d'un tétraèdre est donc complète.

3. Quand le polyèdre (P) est un tétraèdre, $n = 4$. La plupart des propriétés déjà signalées dans cette hypothèse ([3]) s'appliquent à un polyèdre harmonique (enveloppe des faces, des sphères de Tücker, etc.).

([3]) V. Thébault, *Comptes rendus*, **217**, 1943, p. 257-259; **224**, 1947, p. 1267-1269; *The Mathematical Gazette*, **30**, 1946, p. 222; Tarry et Neuberg, *loc. cit.*; P. Delens, *Mathesis*, **51**, 1937, p. 144; R. Bouvaist, *Mathesis*, **55**, 1946, p. 357.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Exemples de processus doubles de Markoff.* Note de M. **Paul Lévy**, présentée par M. Émile Borel.

Dans une Note récente ([1]) le résultat d'une étude relative aux processus doubles laplaciens et stationnaires nous avait conduit à énoncer une hypothèse assez générale : sauf dans certains cas dégénérés, il n'existerait pas de processus doubles de Markoff. Nous allons montrer par des exemples que cette hypothèse ne peut être exacte qu'avec certaines conditions restrictives.

1° Considérons dans le plan une suite de quadrillages Q_n, de côtés a_n tendant vers zéro, à cela près placés d'une manière quelconque. Soit pour chaque n, une fonction aléatoire $U_n(x, y)$, nulle sur les côtés de Q_n, et égale dans chaque carré de Q_n à ± 1, suivant le résultat d'un tirage à pile ou face; soit q un nombre compris entre zéro et 1/2. Posons

$$U(x, y) = \Sigma q^n U_n(x, y). \tag{1}$$

Un nombre de la forme $\Sigma \pm q^n$ n'ayant jamais qu'une représentation de cette forme, la donnée de U sur une ligne $\mathcal{L}$ qui sépare le plan en deux régions S et S', détermine chacun des U_n dans tout carré du quadrillage Q_n qui est traversé par $\mathcal{L}$. La détermination complète de U, dans S_1 et dans S_2, dépend ensuite de deux séries de tirages au sort indépendants les uns des autres, relatifs, les uns aux carrés intérieurs à S_1, les autres aux carrés intérieurs à S_2. Le processus est donc de Markoff.

2° Soit $\varphi_n = \varphi_n(x, y)$ une fonction continue et indéfiniment dérivable, nulle sur les côtés de Q_n, positive en dehors de ces côtés, et toujours $\leqq 1$. Posons

$$U(x, y) = \Sigma q^n U_n \varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n. \tag{2}$$

Ici encore, la donnée de U en un point détermine tous les U_n en ce point; la conclusion du 1° subsiste.

3° Répartissons les nombres entiers positifs en une infinité de suites $S_n (n = 0, 1, \ldots)$, toutes infinies. Soit E_n l'ensemble des nombres compris entre zéro et un, et dont toutes les décimales de rangs n'appartenant pas à S_n sont nulles. Soit $U_n(x, y)$ une variable aléatoire, nulle sur les côtés de Q_n, et ayant dans chaque carré de Q_n une valeur constante, appartenant à l'ensemble E_n, et dépendant d'une loi de probabilité continue. Posons

$$U(x, y) = U_1(x, y) + \ldots + U_n(x, y) + \ldots \tag{8}$$

Ici encore, la donnée de U en un point détermine tous les U_n, et la conclusion du 1° subsiste.

([1]) *Comptes rendus*, 226, 1948, p. 53.

4° Soit maintenant une suite de fonctions aléatoires indépendantes et stationnaires $U_n(x)$, les valeurs possibles de chaque U_n appartenant à E_n. Soient $\theta_n (n = 1, 2, \ldots)$ des nombres formant une suite partout dense dans l'intervalle $(0, \pi)$. Posons

$$U(x, y) = \Sigma U_n(x \cos\theta_n + y \sin\theta_n). \tag{4}$$

La donnée de U sur un contour fermé $\mathcal{L}$ détermine chaque U_n sur ce contour, donc dans la plus petite région à contour convexe contenant ce contour; $U(x, y)$ est donc déterminé dans cette région; le processus est à ce point de vue partiellement dégénéré. Mais il est de Markoff, stationnaire, et à l'extérieur la part du hasard subsiste.

Dans les trois premiers exemples, même pour une aire très petite, si $U(x, y)$ est connu sur le contour, la part du hasard subsiste à l'intérieur. A ce point de vue, ces processus ne sont pas dégénérés, comme le dernier. Ils le sont à un autre point de vue : si un point se déplace dans le plan, tandis que dans le dernier exemple le hasard peut intervenir à chaque instant, dans les trois premiers, il n'intervient qu'à la traversée de lignes données d'avance. C'est un processus à discontinuités fixes.

Ces discontinuités dans l'intervention du hasard sont indépendantes des discontinuités de la fonction $U(x, y)$, qui existent dans le premier et le troisième exemple, mais non dans le second. Quant à la loi dont dépend U, elle est continue dans les trois exemples.

On peut varier à l'infini ces exemples, soit en considérant des quadrillages curvilignes, soit en cherchant d'autres cas dans lesquels la donnée d'une variable aléatoire en détermine plusieurs autres ou une infinité d'autres (par exemple en introduisant une combinaison à coefficients entiers de nombres arithmétiquement indépendants).

Un problème qui reste posé est le suivant : existe-t-il des processus à deux variables, à la fois laplaciens et de Markoff, et qu'on puisse, comme pour les exemples ci-dessus, considérer comme non dégénérés ou comme seulement partiellement dégénérés [2]?

---

[2] Bien entendu nous considérons un processus comme dégénéré, non seulement si la corrélation entre les différentes valeurs de U est trop grande (par exemple lorsque U est constant sur certaines lignes donnée d'avance), mais aussi si elle est trop petite, et qu'en conséquence cette fonction soit partout discontinue (dans l'exemple 1°, elle l'est presque sûrement sur un ensemble partout dense, mais non partout).

MÉCANIQUE APPLIQUÉE. — *Sur les applications à l'aérotechnique de l'enregistrement photographique de la verticale gyroscopique et de la dérive.* Note [1] de M. **Bernard Dubuisson**, présentée par M. Joseph Pérès.

De nombreux problèmes d'aérodynamique théorique et pratique nécessitent la connaissance des cinq éléments géométriques définissant la position d'un aéronef en vol et qui sont, à un instant t : les coordonnées x et y du nadir N d'un point S lié à l'avion, l'altitude A de ce point S au-dessus d'un plan de comparaison H, l'inclinaison i du plan de vol h sur le plan horizontal et enfin l'azimut θ de la ligne de plus grande pente du plan de l'avion (*fig.* 1). Certains

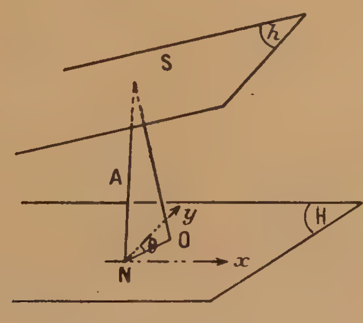


Fig. 1.

problèmes enfin nécessitent la connaissance continue de ces éléments pendant un temps T compris entre t_1 et t_2.

Ces renseignements ne peuvent être fournis avec une précision suffisante par les indicateurs de bord, et seules les coordonnées x, y et A du point S peuvent être déterminées par des observations synchronisées à terre, depuis trois théodolites ou cinéthéodolites.

M. H. Roussilhe [2] a indiqué une solution qui consistait à situer l'avion par rapport au terrain grâce à une liaison géométrique obtenue par la photographie aérienne; le cliché était transformé dans un appareil de redressement grâce à la connaissance de quatre points connus du plan H et identifiés sur le cliché. M. H. Roussilhe a montré que le problème était soluble même quand le terrain était accidenté [3] et que l'on pouvait, en outre, utiliser les formules différentielles simples [4].

M. R. Martin [5] a donné une méthode photographique de détermination de l'inclinaison i.

---

(1) Séance du 12 janvier 1948.

(2) *Comptes rendus*, **174**, 1922, p. 863.

(3) *Comptes rendus*, **187**, 1928, p. 816.

(4) *Comptes rendus*, **187**, 1928, p. 970 et *Revue Hydrographique*, n° 12.

(5) *Thèse d'ingénieur docteur*, Paris, 31 juillet 1937.

J'ai donné (6) une méthode plus générale et rapide pour définir les cinq éléments de la position du plan h à partir des déformations observées sur une photographie aérienne. Enfin, j'ai encore donné (7) une autre méthode de détermination des éléments initiaux d'une photographie aérienne, par le calcul différentiel, qui résolvait ce problème à l'instant t de la prise d'une photographie

Mais récemment j'ai fait construire un appareil enregistreur gyroscopique donnant, sur film de 35mm, des images du sol, de la dérive et du pied de la verticale superposées. L'appareil peut se déclencher image par image ou donner une suite d'images cinématographiques de ces mêmes objets, durant les évolutions de l'aéronef.

Cet appareil enregistreur (*fig.* 2) se compose de trois parties : 1° Un cinémo-

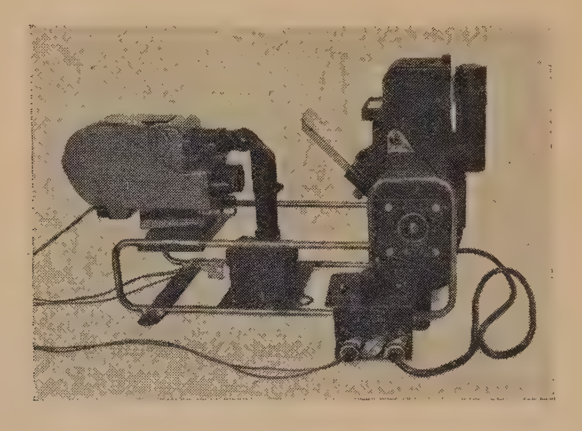


Fig. 2.

dérivomètre gyroscopique fournissant l'image gyroscopée d'une grille lumineuse orientable suivant la dérive et dont le centre définit le nadir; cette image, collimatée à l'infini, traverse une glace semi-argentée inclinée à 45°; 2° Un compteur de vues muni d'un objectif collimatant son image à l'infini; 3° Une ciné-mitrailleuse enregistrant sur film les images superposées : de la grille gyroscopée donnant la dérive, du numéro de la vue du terrain survolé réfléchie par la glace semi-argentée et du pied de la verticale superposée à cette image du terrain. Enfin une croix fixe de l'appareil apparaît, en outre, sur cette image et définit une normale SO au plan de vol h de l'aéronef.

A la lecture du film, 4 des éléments de la position du plan de vol sont directement connus sans calcul ni transformation optique, ce sont x, y, i et θ. La connaissance de l'altitude A peut résulter soit de la transformation optique rapide des photographies, soit de la transformation de l'une d'elles et de la compa-

(6) *Comptes rendus*, **216**, 1943, p. 867-869.
(7) *Thèse d'ingénieur-docteur*, Paris, 24 novembre 1943.

raison des indications d'un statoscope. Cet appareil qui a été longuement expérimenté en vol, donne les indications de l'inclinaison i à la précision de $7'$, supérieure à celle des procédés précédemment indiqués. Il correspond à de nombreuses applications en aérotechnique : contrôle de stabilité en vol, contrôle du fonctionnement des appareils de bord, etc. D'une façon générale, cet appareil permet d'étudier tous les phénomènes liés à l'évolution de l'aéronef et des indicateurs.

On obtient des résultats complémentaires importants :

1° Le calage direct des clichés photogrammétriques aériens dans les appareils redresseurs ou restituteurs;

2° Une réduction considérable du nombre des points géodésiquement connus au sol et nécessaires aux travaux photogrammétriques. Par voie de conséquence, cet appareil ouvre la voie à d'importantes méthodes nouvelles dans ce domaine.

AÉRODYNAMIQUE. — *Application de la composition des mouvements coniques au calcul aérodynamique de l'aile rectangulaire en régime supersonique.* Note (¹) de M. **Paul Germain**, présentée par M. Joseph Pérès.

1. Nous utilisons trois écoulements coniques (²) élémentaires que nous notons $\overrightarrow{\mathcal{C}_p}(A, \alpha)$, $\overrightarrow{\mathcal{C}_s}(A, \alpha)$, $\overrightarrow{\mathcal{T}}(A, \alpha)$. L'espace est rapporté à trois axes rectangulaires $Axyz$, la vitesse à l'infini est dirigée suivant Ox. $\overrightarrow{\mathcal{C}_p}(A, \alpha)$ est le *coin portant;* le cône est un quadrant indéfini passant par Ay dont la projection sur le plan (x, y) est limitée par Ax et Ay; le quadrant fait, avec ce plan, un angle α infiniment petit. $\overrightarrow{\mathcal{C}_s}(A, \alpha)$ ou *coin symétrique* est formé de deux quadrants analogues placés symétriquement par rapport à Axy, faisant avec Axy, les angles $+\alpha$ et $-\alpha$. $\overrightarrow{\mathcal{T}}(A, \alpha)$ est formé d'un quadrant analogue à celui qui intervient dans la définition de $\overrightarrow{\mathcal{C}_p}(A, \alpha)$ et d'un deuxième quadrant coïncidant exactement avec $Ay'x$, Ay' étant la demi-droite opposée à Ay.

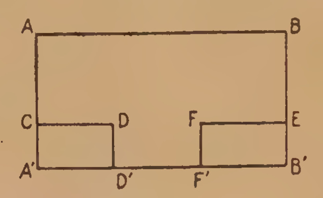
Nous nous contenterons de donner quelques résultats relatifs à l'aile rectangulaire, mais la méthode utilisée s'applique aussi bien à d'autres cas (ailes trapézoïdales, ailes en flèche).

2. La forme en plan est limitée par $AA'BB'$, AB dirigé suivant Ay, AA' suivant Ax, l'unité de longueur égale à AA'. On posera $AB = \lambda$, $\beta y = y^*$ ($\beta = \sqrt{M^2 - 1}$, M nombre de Mach de l'écoulement). Le profil de l'aile, constant en envergure, sera défini par les angles $\alpha^+(\xi)$ et $\alpha^-(\xi)$ que font, au point ξ $(0 < \xi < 1)$, l'intrados et l'extrados avec la corde du profil.

(¹) Séance du 22 décembre 1947.

(²) *Comptes rendus*, **224**, 1947, p. 183.

Supposons l'aile symétrique ($\alpha^{+} = -\alpha^{-} = \alpha$) et à portance nulle. On obtiendra l'écoulement en superposant des mouvements du type $\vec{\mathcal{C}}_s$ dont les sommets varieront sur AA′, des mouvements du type $\vec{\mathcal{C}}_s$ dont les sommets décriront BB′ et en retranchant l'écoulement autour d'une aile d'envergure infinie, définie



par le profil de l'aile donnée. On obtient, par exemple, pour la traînée de la section y^*,

$$C_\lambda(y^*) = \frac{4}{\beta}\int_0^1 \alpha^2(\xi)\,d\xi + F(y^*) - F(\beta\lambda - y^*),$$

$$F(y^*) = 2\frac{\varepsilon}{\beta}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{1-y^*} d\alpha(\eta)\int_{y^*+\eta}^{1} \arcsin\frac{y^*}{\eta - \xi}\,\alpha(\xi)\,d\xi - \int_0^1 \alpha(\xi)\,\alpha(\xi - y^*)\,d\xi\right\},$$

$$\varepsilon = +1 \quad \text{si} \quad y^* < 1, \qquad \varepsilon = 0 \quad \text{si} \quad y^* > 1.$$

L'application à un profil en losange est immédiate. On trouve par exemple, pour la traînée totale,

$$C_\lambda = \frac{4\alpha^2}{\beta}[2D(2\beta\lambda) - D(\beta\lambda)],$$

$$D(u) = 1, \quad (1 \leq u); \quad D(u) = \frac{1}{\pi}\left\{u^{-1}(1 - u^2)^{\frac{1}{2}} + 2\operatorname{Arcsin} u + \operatorname{Argch}\frac{1}{u}\right\}; \quad (0 \leq u \leq 1).$$

Les résultats trouvés concordent bien avec les courbes données récemment par M. Th. von Karmann [3], courbes qui semblent avoir été obtenues par une autre méthode.

3. On peut obtenir le cas plus général où $2f(\xi) = \alpha^{+}(\xi) + \alpha^{-}(\xi)$ est différent de zéro et où l'aile se trouve à une incidence j en superposant, de façon tout analogue, des mouvements du type $\mathcal{C}_p$. Supposons, pour simplifier $\beta\lambda > 1$ et posons

$$z(x) = \int_0^x f(\xi)\,d\xi, \qquad \nu = z(1), \qquad \mu = \int_0^1 z(x)\,dx, \qquad 4\bar{\alpha}^2 = \int_0^1 (\alpha^{+} - \alpha^{-})^2\,dx.$$

On trouve pour les efforts globaux

$$C_z = \frac{4j}{\beta}\left(1 - \frac{1}{2\beta\lambda}\right) + \frac{4}{\beta}\left(\nu - \frac{\mu}{\beta\lambda}\right),$$

$$C_\lambda = \frac{4}{\beta}(j + \nu)^2\left(1 - \frac{1}{2\beta\lambda}\right) + \frac{4\bar{\alpha}^2}{\beta}.$$

---

(3) *Supersonic aérodynamics principles and applications* [*Journ. of aero. sci.*, juillet 1947 (*fig.* 6 et 7)].

4. En utilisant les mouvements $\vec{\mathcal{C}}$, on peut calculer les effets de gauchissements et les effets d'ailerons. Par exemple, pour calculer les effets, sur une plaque à incidence α d'ailerons A′CDD′ et EFF′B′ braqués à $+\gamma$ et $-\gamma$, il faudra superposer les écoulements suivants :

$$\vec{\mathcal{C}}_p(A, \alpha), \quad \overleftarrow{\mathcal{C}}_p(B, \alpha), \quad E(AB, -\alpha),$$
$$\vec{\mathcal{C}}_p(C, \gamma), \quad \overleftarrow{\mathcal{C}}\,(D, \gamma), \quad E(CD, -\gamma),$$
$$\overleftarrow{\mathcal{C}}_p(E, -\gamma), \quad \vec{\mathcal{C}}\,(F, -\gamma), \quad E(EF, \gamma).$$

$E(AB, \alpha)$ désignant, par exemple, une plaque d'envergure infinie à l'incidence α dont le bord d'attaque coïncide avec AB.

Le calcul des Cz et des différents moments est immédiat.

MÉCANIQUE ONDULATOIRE. — *Sur la force de Lorentz et la force de spin dans la théorie de l'électron de Dirac.* Note [1] de M. **Gérard Petiau.**

Considérons l'équation d'ondes de l'électron de Dirac dans le champ électromagnétique **E**, **H**, de potentiels **V**, **A**

$$(1) \qquad L\psi = [P_0 + \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha} + m_0 c\alpha_4]\psi = 0,$$
$$P_0 = \frac{h}{2\pi i}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon V, \qquad \mathbf{P} = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \varepsilon \mathbf{A}$$
$$\alpha_\mu\alpha_\nu + \alpha_\nu\alpha_\mu = 2\,\delta_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4), \qquad \varepsilon = +\frac{e}{c}.$$

La formule de dérivation quantique

$$(2) \qquad \frac{d}{dt}\int \psi^\star C\psi\, dv = \frac{2\pi i c}{h}\int \psi^\star(LC - CL)\psi\, dv$$

nous donne immédiatement

$$(3) \qquad \frac{d}{dt}\int \psi^\star \mathbf{x}\psi\, dv = -c\int \psi^\star \boldsymbol{\alpha}\psi\, dv,$$

$$(4) \qquad \frac{d}{dt}\int \psi^\star \mathbf{P}\psi\, dv = -c\varepsilon\int \psi^\star[\mathbf{E} + (\mathbf{H}\wedge\boldsymbol{\alpha})]\psi\, dv.$$

Si nous introduisons les matrices vecteurs π, $\boldsymbol{\mu}$, de composantes $i\alpha_1\alpha_4$, $i\alpha_2\alpha_4$, $i\alpha_3\alpha_4$, $i\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, $i\alpha_3\alpha_1\alpha_4$, $i\alpha_1\alpha_2\alpha_4$, représentant les opérateurs moment électrique et moment magnétique propres de l'électron, l'équation (1) combinée avec son équation conjuguée nous donne

$$2m_0 c\,\psi^\star\alpha_p\psi - [(P_p^\star\psi^\star)\alpha_4\psi + \psi^\star\alpha_4(P_p\psi)] - \frac{h}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x^q}[\psi^\star i\alpha_p\alpha_q\alpha_4\psi]$$
$$+ \frac{h}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x^r}[\psi^\star i\alpha_r\alpha_p\alpha_4\psi] - \frac{h}{2\pi}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\psi^\star i\alpha_p\alpha_4\psi] = 0,$$

---

[1] Séance du 19 janvier 1948.

et après intégration en tenant compte de la condition de nullité à l'infini des fonctions d'ondes,

$$\int \psi^\star \alpha_p \psi \, dv = \frac{h}{4\pi m_0 c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \psi^\star i\alpha_p \alpha_4 \psi \, dv + \int \psi^\star \frac{\alpha_4 \mathrm{P}_p}{m_0} \psi \, dv.$$

Tenant compte de cette relation, la formule (3) s'écrit

$$\frac{d}{dt} \int \psi^\star \left[\mathbf{x} + \frac{h}{4\pi m_0 c} \pi \right] \psi \, dv = - \int \psi^\star \left(\alpha_4 \frac{\mathbf{P}}{m_0} \right) \psi \, dv.$$

L'opérateur $-\alpha_4(\mathbf{P}/m_0)$ est l'opérateur vitesse correspondant à la relation $\mathbf{v} = (\mathbf{P}/m)$ de la théorie relativiste des particules non douées de spin. Nous voyons ici que cette grandeur ne correspond plus à la dérivée par rapport au temps de la densité de valeur moyenne de la position $\mathbf{x}$, mais à celle du point voisin $\mathbf{x} + (h/4\pi m_0 c)\pi$.

Si nous transformons de même la relation (4), nous obtenons intégralement

$$\frac{d}{dt} \int \psi^\star \left(\mathbf{P} + \frac{h\varepsilon}{4\pi m_0 c} [\mathbf{H} \wedge \pi] \right) \psi \, dv = \varepsilon \int \psi^\star \left(\mathbf{E} \frac{\mathrm{P}_0 \alpha_4}{m_0} - \left[\mathbf{H} \wedge \frac{\mathbf{P}\alpha_4}{m_0} \right] \right) \psi \, dv$$
$$+ \frac{\varepsilon h}{4\pi m_0} \int \psi^\star \left(\frac{d}{d\mathbf{x}} [(\mathbf{E}\pi) + (\mathbf{H}\boldsymbol{\mu})] \right) \psi \, dv.$$

Cette expression s'écrit encore

$$\frac{d}{dt} \int \psi^\star \left(\mathbf{P} + \frac{h\varepsilon}{4\pi m_0 c} [\mathbf{H} \wedge \pi] \right) \psi \, dv = \mathcal{F}_{\mathrm{L}} + \mathcal{F}_{\mathrm{S}},$$

et met en évidence la force de Lorentz $\mathcal{F}_{\mathrm{L}}$ déduite de l'opérateur

$$\varepsilon \left(\mathbf{E} \frac{\mathrm{P}_0 \alpha_4}{m_0} - \left[\mathbf{H} \wedge \mathbf{P} \frac{\alpha_4}{m_0} \right] \right),$$

et la force de spin $\mathcal{F}_{\mathrm{S}}$ déduite de l'opérateur gradient de l'énergie potentielle propre $(h\varepsilon/4\pi m_0 c)\,[(\mathbf{E}\pi) + (\mathbf{H}\boldsymbol{\mu})]$ due à l'existence du moment électromagnétique propre de la particule.

MÉCANIQUE ONDULATOIRE. — *Sur une théorie du méson à masses multiples.* Note de M. **Robert Potier.**

Dans une Note précédente [1] nous avons défini une représentation pour un corpuscule de spin 1 à masses multiples. Nous avons trouvé que ce corpuscule était susceptible de présenter 4 états de masse distincts [2] : M_+, M_-, m_+, m_-; ces 4 nombres étant astreints à la seule condition d'être réels. On peut montrer que le système (S) de notre Note déjà citée donne la solution (indécomposable en

---

[1] *Comptes rendus*, **226**, 1948, p. 63-64.

[2] Dans notre Note citée ci-dessus, il convient de lire m_- à la place de m_+ dans la dixième équation du système S.

sous-systèmes indépendants) la plus générale du problème du corpuscule de spin 1 à masses multiples.

Étant données deux fonctions d'ondes quelconques obéissant à (S), soient ψ et $\mathcal{F}$, l'expression du vecteur-courant de divergence d'espace-temps nulle nous conduit à écrire pour produit scalaire de ces fonctions, l'intégrale dans tout l'espace de la quantité

$$\begin{aligned}[\psi\mathcal{F}]=i\{ & (\psi_{+00}^{11}-\psi_{+11}^{11})(\mathcal{F}^{*02}_{01}-\mathcal{F}^{*20}_{10})+\psi_{+01}^{11}(\mathcal{F}^{*02}_{02}+\mathcal{F}^{*20}_{00})-\psi_{+10}^{11}(\mathcal{F}^{*02}_{00}+\mathcal{F}^{*20}_{20}) \\ & -(\mathcal{F}^{*11}_{+00}-\mathcal{F}^{*11}_{+11})(\psi^{02}_{01}-\psi^{20}_{10})+\mathcal{F}^{11}_{+10}(\psi^{02}_{00}+\psi^{20}_{20})-\mathcal{F}^{*11}_{+01}(\psi^{02}_{02}+\psi^{20}_{00}) \\ & -(\psi_{-00}^{11}-\psi_{-11}^{11})(\mathcal{F}^{*02}_{01}+\mathcal{F}^{20}_{10})+\psi_{-10}^{11}(\mathcal{F}^{02}_{00}-\mathcal{F}^{*20}_{20})+\psi_{-01}^{11}(\mathcal{F}^{20}_{00}-\mathcal{F}^{*02}_{02}) \\ & +(\mathcal{F}^{*11}_{-00}-\mathcal{F}^{*11}_{-11})(\psi^{02}_{01}+\psi^{20}_{10})+\mathcal{F}^{*11}_{-01}(\psi^{02}_{02}-\psi^{20}_{00})+\mathcal{F}^{*11}_{-10}(\psi^{20}_{20}-\psi^{02}_{00}) \\ & +\psi^{00}_{+}(\mathcal{F}^{*11}_{+00}+\mathcal{F}^{*11}_{+11})-\mathcal{F}^{*00}_{+}(\psi^{11}_{+00}+\psi^{11}_{+11}) \\ & -\psi^{00}_{-}(\mathcal{F}^{*11}_{-00}+\mathcal{F}^{*11}_{-11})+\mathcal{F}^{*00}_{-}(\psi^{11}_{-00}+\psi^{11}_{-11})\},\end{aligned}$$

soit $(\psi\mathcal{F})=\int_{\text{esp}}[\psi\mathcal{F}]\,d\tau$.

Écrivons le système (S) sous la forme

$$(\text{S}') \qquad -i\frac{\partial\psi}{\partial t}=(\text{H}+\text{H}_1)\psi,$$

H_1 représentant la contribution à l'hamiltonien du champ électromagnétique. Supposons H_1 petit, et appelons ψ_0 et $\mathcal{F}_0$ deux solutions du système

$$(\text{S}'') \qquad -i\frac{\partial\psi}{\partial t}=\text{H}\psi,$$

valable en l'absence de champ.

Nous avons fait le calcul de ψ_0 et $\mathcal{F}_0$ en supposant qu'elles sont des ondes planes de l'un quelconque des cas purs de masse.

La probabilité de transition de l'état représenté par ψ_0 à celui représenté par $\mathcal{F}_0$ est commandée par la valeur de l'expression $(\text{H}_1\psi_0.\mathcal{F}_0)$, que nous avons calculée. Un examen qualitatif des propriétés de cette expression nous conduit aux résultats suivants :

1. Si ψ_0 représente un cas pur de masse, la probabilité de transition vers un autre cas pur de masse reste infime tant que la quantité de mouvement du corpuscule est notable. La probabilité de transition vers des états d'énergie et de quantité de mouvement très voisines (donc de même masse) est beaucoup plus grande.

2. Quand le corpuscule est presque complètement freiné, le nombre des états de même masse et d'énergie légèrement inférieure devient beaucoup plus petit que celui des états d'énergie comparable et de masse différente. Cela compense en quelque sorte le déséquilibre entre les deux valeurs de $(\text{H}_1\psi_0.\mathcal{F}_0)$ ($\mathcal{F}_0$ représentant la même masse, puis une masse différente).

C'est alors que s'opère la transition, au bout d'un temps relativement long, l'énergie étant conservée, la quantité de mouvement ne l'étant pas.

Les résultats 1 et 2 suffisent à notre avis pour expliquer qualitativement

l'aspect des plaques photographiques présentant le phénomène de double méson.

3. *Règles de sélection.* — Dans le cas 2, seule la composante statique du champ a une action notable. $(H, \psi_0 . \mathcal{F}_0)$ se présente alors sous la forme

$$\int_{\text{esp.}} V[\psi_0 . \mathcal{F}_0]\, d\tau,$$

V étant une fonction réelle définie dans l'espace-temps. On peut voir, alors, que la transition n'est possible qu'entre les états

$$M_+ \quad \text{et} \quad m_+;$$
$$M_- \quad \text{et} \quad m_-;$$
$$m_+ \quad \text{et} \quad m_-.$$

Une des masses peut être prise d'un ordre de grandeur voisin de celle de l'électron, ce qui permet de faire entrer le *corpuscule de désintégration* du méson dans la présente théorie.

Remarques. — 1. Il est possible d'introduire dans le système (S) plusieurs (4 au plus) valeurs de la charge électrique, et d'obtenir ainsi un corpuscule à charges multiples.

2. Si l'on admet l'existence d'une masse 1000, de deux masses voisines de 200 et 300, et d'une masse 3, on peut tenter d'identifier le corpuscule de désintégration avec ce méson 3, il y a deux possibilités

$$M_{+\tau}\, 1000, \quad m_{+\tau}\ 3;$$
$$M_{-\tau}\ 300, \quad m_{-\tau}\, 200$$

(et celle qu'on obtient en échangeant les indices + et —). Les autres choix ne cadreraient pas avec les expériences connues et nos règles de sélection.

3. L'émission d'un photon (ou deux neutrinos) au moment du passage de la masse 300 à la masse 200 est probable, si l'on admet ces valeurs de masse. Mais le phénomène global n'a pas lieu avec conservation de la quantité de mouvement.

MÉCANIQUE QUANTIQUE. — *Application à l'étude de l'oscillateur harmonique de la fonction caractéristique quantique.* Note de M. **Bernard d'Espagnat.**

Formules utilisées. — Soient deux opérateurs V et T et soit $T' = e^{-V} T e^{V}$, une itération immédiate donne

$$e^{T'} = e^{-V} e^{T} e^{V}.$$

D'autre part, soient

$$\theta(T) = VT - TV, \quad \theta^2(T) = \theta[\theta(T)] = V^2T - 2VTV + TV^2, \quad \theta^3(T) = \theta[\theta^2(T)], \quad \ldots,$$

d'où, aisément,

$$T' = e^{-V} T e^{V} = e^{-\theta}(T).$$

Donc [1]

$$e^{-V} e^{T} e^{V} = e^{T'} \quad \text{avec} \quad T' = e^{-V} T\, e^{V} = e^{-\theta}(T). \tag{1}$$

Considérons alors la fonction caractéristique quantique [2] à l'instant t de l'opérateur A

$$\Phi_t(s) = (\psi_t,\, e^{2\pi i s A}\psi_t) = \left(\psi_0,\, e^{-\frac{2\pi i}{h}Ht}\, e^{2\pi i s A}\, e^{\frac{2\pi i}{h}Ht}\psi_0\right), \tag{2}$$

d'après (1)

$$\Phi_t(s) = \left(\psi_0,\, e^{2\pi i s\, e^{-\frac{2\pi i}{h}Ht} A\, e^{\frac{2\pi i}{h}Ht}}\psi_0\right), \tag{3}$$

et cette dernière expression permet, dans certains cas, de calculer simplement $\Phi_t(s)$.

Il nous sera commode, pour des raisons de symétrie dans les calculs, de considérer une fonction caractéristique *formelle* à deux variables u et v, de la forme $(\psi,\, e^{2\pi i(uA+vB)}\psi)$ qui, une fois calculée, nous donnera immédiatement les fonctions caractéristiques de A puis de B par $v = 0$, puis $u = 0$ [3]. Nous écrirons donc

$$\Phi_t(uv) = (\psi_t,\, e^{2\pi i(uA+vB)}\psi_t) = (\psi_0,\, e^{2\pi i e^{-V} T e^{V}}\psi_0), \tag{4}$$

avec les notations suivantes : A, opérateur quantité de mouvement $-(h/2\pi i)(\partial/\partial x)$; B, opérateur position x; H, opérateur hamiltonien; $V = (2\pi i/h)Ht$; $T = uA + vB$.

L'oscillateur linéaire harmonique. — L'hamiltonien est $H = (A^2/2m) + (k^2/2)B^2$; nous poserons, outre $T = uA + vB$, $T_1 = k^2 uB - (v/m)A$. On trouve $\theta(T) = VT - TV = tT_1$, puis $\theta^2(T) = \theta[\theta(T)] = -(k^2t^2/m)T$; par itération on obtient ensuite

$$\theta^{2p}(T) = \left(-\frac{k^2t^2}{m}\right)^p T \quad \text{et} \quad \theta^{2p+1}(T) = t\left(-\frac{k^2t^2}{m}\right)^p T_1 \tag{5}$$

et, par conséquent

$$e^{-\theta}(T) = \cos\frac{kt}{\sqrt{m}}\,T + \frac{\sqrt{m}}{k}\sin\frac{kt}{\sqrt{m}}\,T_1, \tag{6}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} e^{-V} T\, e^{V} = e^{-\theta}(T) = {} & \left(u\cos\frac{kt}{\sqrt{m}} + \frac{v}{k\sqrt{m}}\sin\frac{kt}{\sqrt{m}}\right)A \\ & + \left(v\cos\frac{kt}{\sqrt{m}} - k\sqrt{m}\,u\sin\frac{kt}{\sqrt{m}}\right)B, \end{aligned} \tag{7}$$

d'où :

THÉORÈME. — *La fonction caractéristique formelle $\Phi_t(uv)$ à l'instant t s'obtient*

---

(1) Cf. A. BUHL, *Mém. Sc. Math.*, 62, 1934, § 6.

(2) E. ARNOUS, *Thèse*, Paris, C. D. U., 1946.

(3) Cf. B. D'ESPAGNAT, *Comptes rendus*, 225, 1947, p. 1058.

en remplaçant u par

$$u \cos \frac{kt}{\sqrt{m}} + \frac{v}{k\sqrt{m}} \sin \frac{kt}{\sqrt{m}}$$

et v par

$$v \cos \frac{kt}{\sqrt{m}} - k\sqrt{m}\, u \sin \frac{kt}{\sqrt{m}}$$

dans la fonction caractéristique formelle $\Phi_0(uv)$ *à l'instant initial;* autrement dit, par une simple rotation effectuée sur le point M $\left(\sqrt{m}\,u,\ v/k\right)$.

Application. — Schrödinger ([4]) a démontré que l'on peut, par une superposition convenable de fonctions propres, associer à la particule mobile un globule de probabilité en forme de loi de Gauss qui oscille de part et d'autre du centre attractif avec la période $\nu = \left(k/2\pi\sqrt{m}\right)$ de l'oscillateur; le théorème précédent permet de généraliser ce résultat.

Soit

$$\psi_0 = a\, e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2} - \frac{2\pi i}{h} m w x} \quad \text{(forme de Darwin pour } t = 0\text{)},$$

$$\Phi_0(uv) = e^{-\frac{h^2 u^2}{8\sigma^2} - 2\pi^2\sigma^2 v^2}\, e^{2\pi i m w u}.$$

On en tire $\Phi_t(uv)$ par le remplacement indiqué; en particulier pour $u = 0$

$$\Phi_t(ov) = e^{-\left(2\pi^2\sigma^2\cos^2\omega t + \frac{h^2}{8\sigma^2 m k^2}\sin^2\omega t\right)v^2 + 2\pi i w k\sqrt{m}\, v \sin\omega t},$$

d'où

$$\sigma_t^2 = \sigma^2\cos^2\omega t + \frac{h^2}{16\pi^2\sigma^2 m k^2}\sin^2\omega t,$$

ce qui montre que ce n'est que dans le cas particulier obtenu par Schrödinger, où $\sigma^4 = h^2/16\pi^2 m k^2$, que le paquet d'onde demeure invariable de forme; dans le cas général où σ est à l'instant initial quelconque par rapport à k, le globule de probabilité se trouve, en plus de son mouvement oscillatoire d'ensemble de part et d'autre de l'origine, soumis à une *pulsation* interne de fréquence double.

MÉCANIQUE STATISTIQUE QUANTIQUE. — *Grandeurs observables et fonctions aléatoires.* Note ([1]) de MM. **Edmond Arnous** et **Daniel Massignon**,

La théorie des fonctions aléatoires est, sans doute, appelée à envahir de plus en plus le domaine de la Mécanique statistique. Mais jusqu'ici, à notre connaissance, elle n'a pas franchi les frontières de la Physique classique. C'est pourquoi nous nous proposons, dans cette Note, d'essayer de déterminer de

---

([4]) *Naturwissenschaften*, **28**, 1926, p. 664.

([1]) Séance du 19 janvier 1948.

façon précise *les grandeurs observables qui, en Mécanique quantique, sont fonctions aléatoires du temps;* parmi elles se trouveront les « grandeurs macroscopiques » de von Neumann [2].

Notations et formules de Mécanique quantique. — En Mécanique quantique, l'état du système matériel, c'est-à-dire ce que nous savons du système au moment où il est livré à notre investigation, est représenté par un élément ψ d'un espace de Hilbert [3]. Les grandeurs observables sont représentées par des opérateurs A, B, ... self-adjoints du même espace. L'évolution de l'état, ou des opérateurs, entre l'instant où le système a été constitué et l'instant t où nous allons faire nos mesures, est définie, à l'aide d'un opérateur unitaire U_t, par les transformations

$$\psi \rightarrow \psi_t = U_t \psi, \qquad t \geqq 0, \tag{1}$$

$$A \rightarrow A_t = U_t^\star A U_t = S_t A, \tag{2}$$

si $U^\star$ désigne l'opérateur adjoint de U.

Il est alors possible de donner des prévisions sur les résultats des mesures à faire à l'instant t. En effet, on obtient la valeur moyenne d'une observable A en formant le produit scalaire $(\psi, A\psi)$, et l'usage de cette règle est nécessaire et suffisant pour déterminer complètement les lois de probabilité des diverses observables [4].

Évolution des opérateurs et fonctions aléatoires. — La théorie des fonctions aléatoires se présente d'une tout autre façon. Une grandeur, en effet, est fonction aléatoire du temps, chaque fois qu'il est possible de connaître la loi de probabilité conjuguée des valeurs de A pour un *ensemble de mesures* faites à des instants $t_1, t_2, \ldots, t_n$ quelconques et non pas la seule répartition des valeurs de A pour *une mesure* faite à un intant t arbitraire. Ainsi, les prévisions ne portent plus sur la valeur d'une grandeur à un instant donné, mais sur la *courbe* que fournirait l'enregistrement de ses valeurs successives ou, plus exactement, sur un certain nombre de points de cette courbe. Or, à première vue, la Mécanique quantique ne semble pas capable de nous fournir de telles prévisions, si l'on songe aux perturbations incontrôlables provoquées par des couplages répétés entre l'appareil de mesure et le système.

En réalité, comme nous allons le voir, il existe pourtant des appareils capables d'enregistrer, sans la modifier, « l'*évolution naturelle* » de *certaines* observables; et la Mécanique quantique nous suggère, de façon indirecte, le

(2) J. von Neumann, *Zeits. f. Phys.*, 57, 1929, p. 30-70.

(3) Si nous utilisons la méthode de l'espace de configuration, ψ est une fonction des coordonnées $x_1, y_1\, z_1, \ldots, x_n, y_n\, z_n$ des particules; si nous utilisons la seconde quantification, c'est une fonction des variables $n_1, n_2, \ldots$ (n_i entiers $\geqq 0$). Il n'est pas nécessaire de préciser.

(4) J. von Neumann, *Les fondements mathématiques de la Mécanique quantique*, trad. A. Proca, Paris, Alcan, 1946, chap. III, § 1, p. 141 et 145.

moyen de calculer les lois de probabilité relatives à de tels enregistrements. En effet, il revient au même, au moins en principe, de mesurer l'observable A à l'instant t, et de mesurer l'observable A_t à l'instant zéro ([5]). Les différentes formes de la valeur moyenne le mettent bien en évidence,

$$(\psi, A_t\psi) = (\psi, U_t^* A U_t \psi) = (U_t\psi, AU_t\psi) = (\psi_t, A\psi_t).$$

Ce qui semble nous autoriser à ramener le problème d'une série de mesures échelonnées dans le temps au problème d'un ensemble de mesures simultanées à l'instant zéro, problème que sait résoudre la Mécanique quantique. Nous sommes alors amenés à admettre, outre la possibilité de telles mesures simultanées, l'identité des lois de probabilité conjugée des A_t calculées à l'instant zéro et des lois de probabilité conjuguées des valeurs de A au cours du temps.

Il n'y a plus aucune difficulté à conclure alors : *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une observable soit fonction aléatoire du temps est que les opérateurs* A_t *permutent entre eux*, c'est-à-dire que les A_t forment un *système abélien*; nous noterons cette propriété par

$$A_t \vee A_{t'}. \tag{3}$$

La loi de probabilité conjuguée de A_{t_1} *et* A_{t_2}, par exemple, *a pour fonction de répartition*

$$\mu(x_1, x_2; t_1, t_2) = (\psi, U_t E_{x_1} U_{t_1} U_{t_2}^* E_{x_2} U_{t_2} \psi), \tag{4}$$

et pour fonction caractéristique

$$\varphi(s_1, s_2; t_1, t_2) = (\psi, \exp\{2\pi i(s_1 A_{t_1} + s_2 A_{t_2})\}\psi), \tag{5}$$

en désignant par E_x la décomposition de l'unité relative à A. Ainsi se trouve résolu le problème de l'observation *continue* d'une observable fonction aléatoire du temps et, par suite, aussi celui des *corrélations* entre les valeurs successives d'une telle observable.

ASTROPHYSIQUE. — *Observations de variables rouges au télescope électronique.* Note ([1]) de M. **François Lenouvel**, présentée par M. Bernard Lyot.

Durant le mois de septembre 1947, un télescope électronique a été disposé au foyer Cassegrain du miroir de 80cm de l'Observatoire de Haute-Provence.

Les détails de montage ont fait l'objet d'une précédente Note. Ainsi, le télescope braqué sur une étoile, on observe sur l'écran l'image infra-rouge de l'étoile au voisinage d'une étoile artificielle. On amène alors à l'égalité les éclats des deux taches stellaires, par le jeu d'un coin photométrique. Ces mesures ont été faites en utilisant un écran coloré UG 7.

Dans une première série de mesures, nous avons admis que l'indice de

([5]) Voir à ce sujet E. Fermi, *Nuovo Cimento*, **10**, 1930, p. 561-566.

([1]) Séance du 10 décembre 1947.

couleur des étoiles de spectre AO était nul, ce qui nous a permis d'établir la courbe de correspondance entre les graduations du coin et les magnitudes photovisuelles d'étoiles de spectre AO. Cette courbe une fois déterminée, nous avons pu rapporter nos mesures aux magnitudes des étoiles de spectre AO.

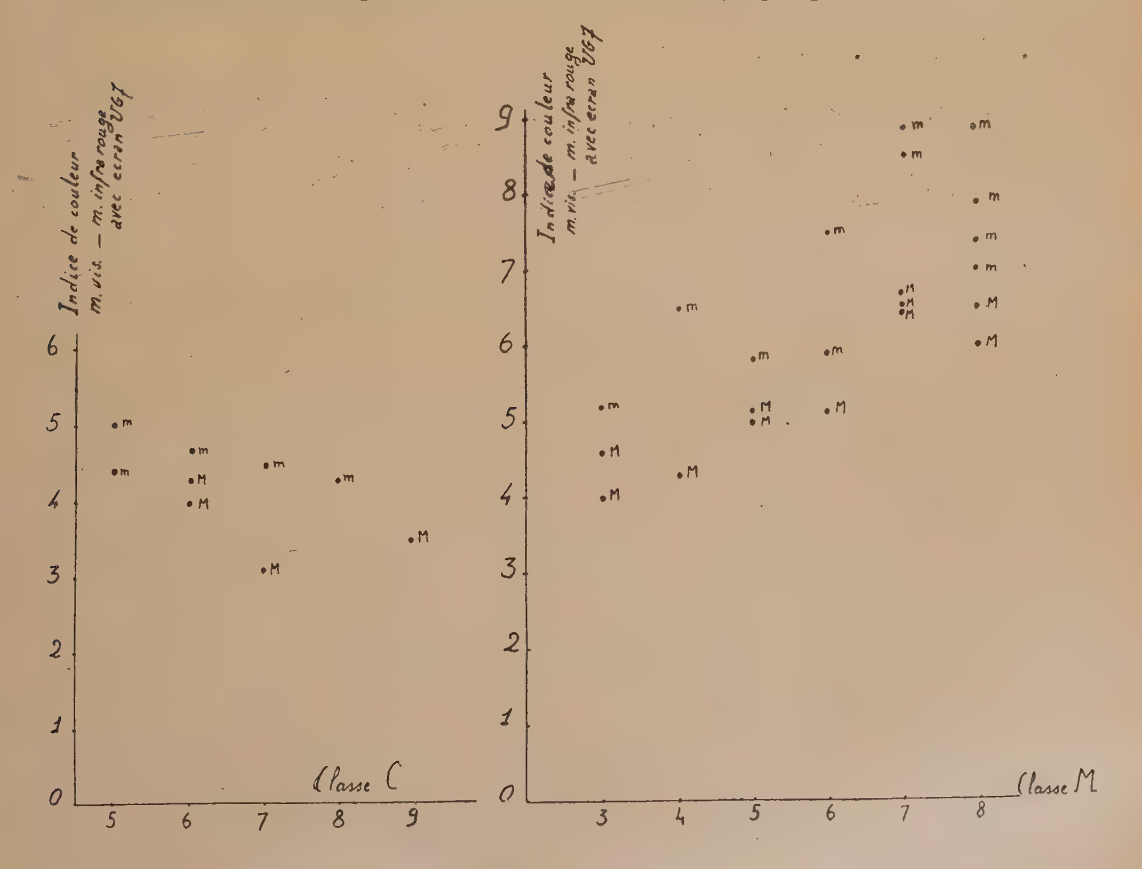
Voici, à titre d'exemple, quelques résultats :

Classe spectrale ...	C 5.	C 5.	C 6.	C 6.	C 6.	C 7.	C 7.	C 8.	C 9.
Nom de la variable.	UU Aur.	W Ori.	V Aqu.	ST Cam.	S Scu.	R Lep.	UX Dra.	RS Cyg.	WZ Cas.
$m_{vis.}$	7,0	7,0	8,2	7,1	8,7	9,2	6,0	9,0	7,0
$m_{IR.}$	2,0	2,7	3,5	2,8	4,7	4,7	2,9	4,7	3,5
Indice de couleur.	5,0	4,3	4,7	4,3	4,0	4,5	3,1	4,3	3,5

Classe spectrale ...	M 3.	M 3.	M 4.	M 4.	M 5.	M 5.	M 6.	M 6.	M 6.
Nom de la variable.	T Aqr.	R Tri.	R Boo.	R Pis.	U Ari.	Z Cyg.	O Cet.	ST Her.	T Ari.
$m_{vis.}$	9,1	6,8	8,0	11,4	8,4	10,2	4,7	8,7	9,7
$m_{IR.}$	5,1	2,2	3,7	4,8	3,3	4,4	—0,3	2,8	2,2
Indice de couleur.	4,0	4,6	4,3	6,6	5,1	5,8	5,0	5,9	7,5

Classe spectrale ...	M 7.	M 7.	M 7.	M 8.	M 8.	M 8.	M 8.
Nom de la variable.	R Cas.	T Cep.	R Can.	W and.	U Ori.	T Cas.	T Lep.
$m_{vis.}$	6,9	10,3	10,8	9,5	10,6	9,0	12,0
$m_{IR.}$	0,1	1,8	1,9	3,5	3,2	1,1	3,1
Indice de couleur.	6,8	8,5	8,9	6,0	7,4	7,9	8,9

Pour ces étoiles, nous avons déterminé l'indice de couleur $m_{vis.} - m_{IR.}$ en fonction de la classe spectrale et l'on a obtenu le graphique suivant :



Nous avons, de plus, noté sommairement la phase approximative de la variable par la lettre *m* étoile au minimum, M étoile au maximum.

Le graphique nous montre que l'indice de couleur est sensiblement constant dans la classe C. Pour la classe M, il croît régulièrement de M3 à M8. Dans une sous-classe, l'indice de couleur varie avec la phase de la variation et croît du maximum au minimum avec une amplitude d'autant plus grande que le type est plus avancé.

Pour les deux plus brillantes étoiles rouges, R Cas et 19 Pis, il a été possible d'observer un étalement spectral dans la partie infrarouge. A cet effet, un prisme à vision directe avait été placé sur le trajet lumineux, devant la photocathode. La sensibilité énergétique d'un tel télescope électronique a un maximum vers $0^{\mu},8$, aussi, pour des étoiles de température 2000°, on n'est donc pas limité par la sensibilité de cet ensemble vers les courtes longueurs d'ondes (zones de $0^{\mu},7$ à 1^{μ}).

Nous avons constaté que l'étalement spectral de R Cas ne subit aucune modification en intensité, ni en longueur après l'interposition de l'écran UG 7 sur le trajet lumineux. L'énergie lumineuse est donc concentrée dans la zone de longueur d'onde supérieure à 1^{μ}.

L'étalement spectral de 19 Pis, classe N, se trouve par contre considérablement diminué en intensité par l'interposition de l'écran UG 7 ; la répartition spectrale maximum se trouve donc placée dans le coude de la caractéristique de cet écran, c'est-à-dire vers 1^{μ}.

Il nous a été impossible d'obtenir un étalement spectral suffisant pour faire apparaître des bandes spectrales à cause de la faible quantité de lumière incidente.

CHALEUR. — *Sur la détermination du rendement thermique d'une combustion permanente avec dilution d'air élevée.* Note de M. **Lucien Reingold**, présentée par M. Gustave Ribaud.

1. Les combustions en régime continu avec grandes dilutions d'air utilisées dans les nouveaux appareils propulsifs modernes nécessitent des recherches s'effectuant entre autres procédés par analyses des gaz. Ces analyses permettent de déceler des concentrations très faibles, de l'ordre de 0,1 %, notamment pour CO, et les imbrûlés avec une excellente précision. Nous nous proposons de montrer comment peuvent être exploités ces résultats expérimentaux, de façon à permettre une interprétation plus complète des phénomènes étudiés, en utilisant une méthode de calculs théoriques qui a fait l'objet de publications antérieures (1).

(1) *Comptes rendus*, **206**, 1938, p. 1792 ; **207**, 1938, p. 717 et 893.

2. Notons, d'abord, que tout combustible usuel est symbolisé par la formule élémentaire $C^nH^{\nu n}$ (dans la technique actuelle, les combustibles utilisés sont tels que le plus fréquemment $\nu = 2$). La méthode de calcul précitée permet de calculer les concentrations des constituants des gaz de combustion en fonction de facteurs caractéristiques de cette combustion. Les résultats obtenus indiqués au tableau ci-dessous, dans lequel :

Constituants.	CO_2.	CO.	H_2O.	H_2.	O_2.	Imbrûlés $C^nH^{\nu n}$.	Gaz inertes N_2+Ar.
res calculés.....	$\frac{\theta_C(1-k_{CO_2})}{P}$	$\frac{\theta_C k_{CO_2}}{P}$	$\frac{\nu\theta_C(1-k_{H_2O})}{2P}$	$\frac{\nu\theta_C k_{H_2O}}{2P}$	$\frac{\left(1+\frac{\nu}{4}\right)(1-\theta_A+\alpha)}{P}$	$\frac{1-\theta_C}{nP}$	$\frac{(\beta_1+\beta_2)\left(1+\frac{\nu}{4}\right)(1+\alpha)}{P}$
res mesurés (%).	3,94	0,97	2,02	0,27	14,97	0,23	77,6
Remarques....	$P = p + \left(p-\frac{\nu}{4}\right)\alpha + (1-\theta_A)\left(1-\frac{\nu}{4}\right) - (1-\theta_C)\left(1+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{n}\right)$					$p = 1+\frac{\nu}{2}+(\beta_1+\beta_2)\left(1+\frac{\nu}{4}\right)$	

α, dilution relative du mélange initial; β_1 et β_2, proportions relatives d'azote et d'argon dans le comburant utilisé; θ_C, fraction de combustible efficace; θ_A, fraction utile de l'air théorique; k_{CO_2}, k_{H_2O} et fractions d'imbrûlés gazeux de CO_2 et H_2O. Ces deux derniers coefficients sont liés par la relation

$$(1)\qquad k_{CO_2} + \frac{\nu}{2} k_{H_2O} = \frac{\theta_C - \theta_A}{\theta_C} \frac{1+\frac{\nu}{4}}{0,5}.$$

L'énergie effectivement cessible à la machine est égale à

$$(2)\qquad Q' = \theta_C\left[Q - nk_{CO_2}Q_{CO} - \frac{\nu n}{2} k_{H_2O} Q_{H_2}\right]$$

(Q, chaleur de réaction du combustible étudié; Q_{CO} et Q_{H_2}, chaleurs de réaction de combustion de CO et H_2).

3. Soit, alors, un résultat d'analyse de gaz de combustion tel que celui donné en exemple au tableau précédent.

On en déduit les valeurs numériques M_1, M_2 et M_3 respectivement les concentrations totales en $CO + CO_2$, en $CO + H_2$ et en $N_2 + Ar$. Ces trois données expérimentales permettent de calculer, θ_A et θ_C, fractions d'air et combustible effectivement utilisées dans la combustion

$$(3)\qquad \theta_C = \frac{M_1}{M_3}(\beta_1+\beta_2)(1+\alpha)\left(1+\frac{\nu}{4}\right),$$

$$(4)\qquad \theta_A = (\beta_1+\beta_2)(1+\alpha)\left[\frac{M_1}{M_3}\left(1+\frac{\nu}{4}\right) - 0,5\frac{M_2}{M_3}\right].$$

De plus, le rendement thermique se calcule directement à partir de sa définition théorique, suivant l'expression

$$(V)\qquad \eta_C = \theta_C\left[1 - \frac{1+\frac{\nu}{4}}{p}\frac{Q_{CO}+Q_{H_2}}{(Q_F)_0}\frac{\theta_C-\theta_A}{\theta_C}\right].$$

Dans cette expression $(Q_F)_0$ est l'énergie thermique correspondant à une mole de gaz de combustion correspondant à une mole de combustible *pour une combustion théorique parfaite* (il se calcule donc par avance, à partir de Q).

4. L'exemple expérimental publié correspond à la combustion dans l'air d'un combustible de formule élémentaire $C_{10,28}H_{10,40}$. Sa masse molaire est égale à 134 et son $(Q_F)_0$ à 18700 cal-g; la dilution relative réalisée, dans cet exemple, est $\alpha = 2,21$. Les calculs numériques donnent comme résultats pour cette combustion

$$\theta_C = 0,95, \qquad \theta_A = 0,86, \qquad \eta_C = 0,83.$$

ÉLECTROLYSE. — *Procédé d'étude du polissage électrolytique*. Note [1] de MM. **Israël Epelboim** et **Claude Chalin**, présentée par M. Aimé Cotton.

L'étude du polissage électrolytique s'effectue en construisant la courbe du courant I traversant la cellule électrolytique en fonction de la tension U aux bornes de celle-ci (courbe courant-tension). Ces courbes présentent en général un palier AB lié à l'existence de la couche anodique [2] (*fig.* 1). L'extré-

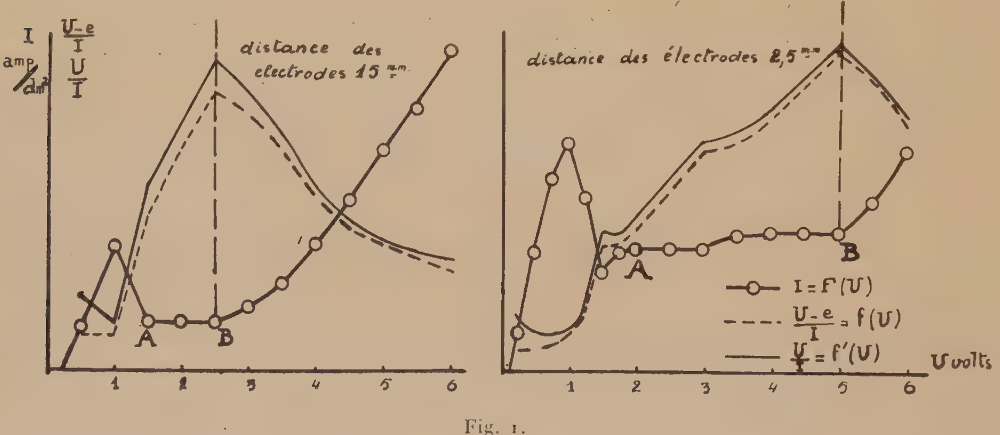


Fig. 1.

mité B correspond aux meilleures conditions de polissage déterminées par le gradient de concentration en ions autour de l'anode [3].

Soit e la force contre-électromotrice de la cellule électrolytique obtenue par extrapolation pour $I = 0$. La détermination de la meilleure condition de polissage revient à celle du maximum de la fonction $(U - e)/I$, car l'établissement du gradient de concentration en ions autour de l'anode [2] se traduit par un accroissement de la résistance ohmique.

---

[1] Séance du 19 janvier 1948.

[2] P.-A. Jacquet, *Comptes rendus*, **201**, 1935, p. 1473.

[3] Elmore, J. *of Applied Physics*, **10**, 1939 p. 727.

Sur la figure 1, nous avons tracé des courbes $(U - e)/I = f(U)$ [4].

On voit ainsi que pour les distances entre électrodes de 15 et $2^{mm},5$, les conditions optima trouvées par Vernon et Stroud correspondent bien aux maxima de la fonction $(U - e)/I$. Contrairement à ces auteurs, et afin de tenir compte de la force contre-électromotrice, nous n'avons pas fait passer les courbes courant-tension par l'origine. D'ailleurs, cette force contre-électromotrice initiale étant de 0,3 et 0,1 volt les courbes $U/I = f'(U)$ présentent le même maximum que $(U - e)/I = f(U)$.

Pour certains métaux, en particulier le fer, le nickel et leur alliage dans les électrolytes du type perchlorique-acétique, la courbe caractéristique courant-tension n'a pas été observée, bien que la pellicule visqueuse anodique se forme toujours [5]. En effet, les courbes courant-tension de la figure 2 que nous avons relevées pour le fer armco et le nickel dans un électrolyte perchlorique-acétique usuel présentent une allure différente de celle de la figure 1.

Mais, si nous traçons la courbe $(U - e)/I = f(U)$, nous obtenons des courbes du type classique de la figure 1 et nous déterminons sans difficulté les conditions optima de polissage, soit 19 A/dm² pour le nickel et 7,3 A/dm²

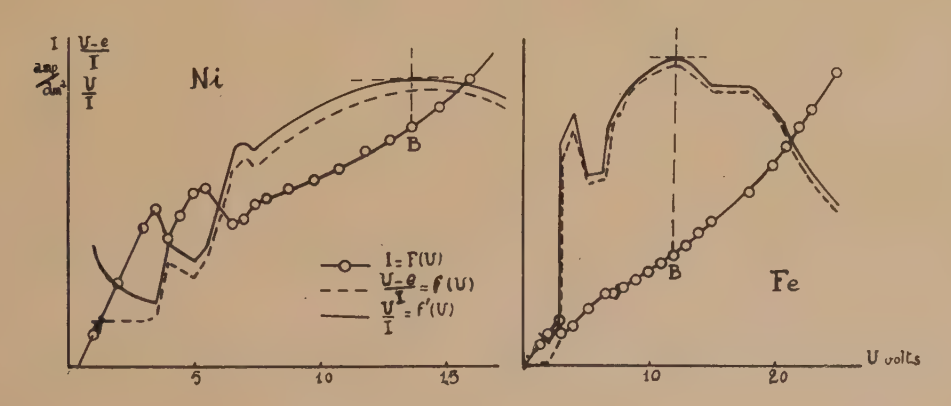


Fig. 2. — Distances des électrodes : 10^{mm}.

pour le fer armco. Nous effectuons pourtant le polissage de ces deux métaux en position verticale, c'est-à-dire dans la position qui donne le plus difficilement les courbes classiques. Comme dans le cas de la figure 1, la courbe $U/I = f'(U)$ donne le même maximum que $(U - e)/I = f(U)$.

La force contre-électromotrice initiale aux bornes de la cellule électrolytique étant en général très petite par rapport à la tension utilisée pendant le polissage, il est donc permis de la négliger et de rechercher les conditions optima par l'emploi de tout dispositif susceptible de mesurer directement le maximum de

---

(4) Calculées d'après les courbes $I = F(U)$ de Vernon et Stroud, pour le zinc dans une solution aqueuse de potasse (*Nature*, **142**, 1938, p. 477).

(5) P.-A. Jacquet, *Métaux et corrosion*, **18**, 1943, p. 1.

résistance de la cellule électrolytique. D'où une technique commode pour le contrôle visuel ou par enregistrement ainsi que pour le réglage automatique du polissage électrolytique.

Nous avons déjà appliqué cette méthode au contrôle du polissage d'une série de métaux et alliages (Fe-Ni-Zn-Al, Fe-Ni 50 %, Fe-Ni 76 %, Fe-Ni 81 %, Fe-Ni-Cu 5 %) dans un électrolyte du type perchlorique-acétique en utilisant un dispositif comprenant un tube cathodique. Nous avons pu ainsi relever automatiquement la courbe courant-tension de P. Jacquet et l'étudier du point de vue de la variation de la résistance. En effet, le diagramme obtenu par points est une courbe qui a pour équations paramétriques en coordonnées polaires

$$\rho = \sqrt{k^2 I^2 + k'^2 U^2}, \qquad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{k'}{k} \frac{U}{I},$$

où ρ et α sont le module et l'argument du point, k et k' des constantes du montage utilisé. Les enregistrements photographiques qui seront publiés par ailleurs confirment bien l'existence d'un maximum de résistance et ramènent ces courbes au cas classique.

En résumé, nous avons ramené la recherche des conditions optima de polissage à l'étude des variations de résistance de la cellule électrolytique. Nous avons pu ainsi montrer que les courbes obtenues dans le cas du polissage du fer, du nickel, etc., dans un électrolyte du type perchlorique-acétique, relèvent du cas classique, car elles présentent toutes un maximum caractéristique de la résistance et que la technique du polissage électrolytique peut être améliorée par l'emploi d'un dispositif d'enregistrement ou de régulation automatique basé sur la mesure directe de la résistance de la cellule.

ÉLECTROMAGNÉTISME. — *Sur la propagation d'ondes planes dans un guide métallique droit de section quelconque.* Note de MM. **Roger Rigal** et **Jean Voge.**

A. Soit $Oxyz$ un trièdre trirectangle, Oz étant parallèle aux génératrices du guide. On sait que le champ électromagnétique d'une onde E ou H se propageant dans le guide peut être dérivée d'un vecteur de Hertz $\vec{\pi}$ à une seule composante π_z parallèle à Oz.

Les ondes propres seront obtenues en posant

$$(1) \qquad \pi_z = f(xy)\, e^{j(\omega t - \gamma z)},$$

où f sera une fonction régulière définie par

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{4\pi^2 f}{\lambda_s^2} = 0 \qquad \text{avec} \qquad \frac{4\pi^2}{\lambda_s^2} = \frac{4\pi^2 \varepsilon\mu}{\lambda^2} - \gamma^2$$

(où λ désigne la longueur d'onde dans le vide et ε et μ la constante diélectrique

et la perméabilité relatives par rapport au vide) et une condition aux limites ($f = 0$ ou $df/dn = 0$) sur la courbe (C) de section droite du guide.

On n'a de solutions que pour une suite discrète de valeurs de λ_s, indépendantes de ε et λ [longueurs d'onde propres d'une membrane encastrée ou libre de contour (C)].

$$g(xy) = e^{j(\alpha x + \beta y)}$$

est une solution de (2) si

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda_s^2},$$

donc aussi

$$(3)\qquad f(xy) = \int e^{jx\alpha}\left\{ A(\alpha)\, e^{jy\sqrt{\frac{4\pi^2}{\lambda_s^2} - \alpha^2}} + B(\alpha)\, e^{-jy\sqrt{\frac{4\pi^2}{\lambda_s^2} - \alpha^2}} \right\} d\alpha,$$

où α est quelconque (réel ou complexe) et où $A(\alpha)$ et $B(\alpha)$ sont des fonctions arbitraires. Inversement on peut démontrer que toute solution de (2) est de la forme (3) [1]. Parfois α et β y sont réels (guides rectangulaires ou circulaires), mais ils peuvent être complexes (coaxial ou guide de section droite limitée par des parties de deux cercles concentriques et de deux diamètres).

Les relations (1) et (3) montrent que toute onde propre peut être décomposée en une somme d'ondes planes faisant un angle constant avec les génératrices, puisqu'une onde plane (α, β, γ), dérivée de π_z (pour $f = g$), fait avec Oz un angle θ tel que

$$(4)\qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} = \frac{\lambda}{\lambda_s\sqrt{\varepsilon\mu}};$$

$\sin\theta$ augmente proportionnellement à λ et λ_s est la longueur d'onde de coupure $[\lambda/\sqrt{\varepsilon\mu}]_c$ dans le milieu.

B. On déduit simplement de (A) les propriétés des ondes propres :

1° La vitesse des plans d'onde (phase) et de l'énergie (groupe) suivant (α, β, γ) étant $c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, on obtient aisément les vitesses et longueurs d'onde de phase (indice fz) et de groupe (gz) suivant Oz et l'on définit des grandeurs analogues de section droite (fs et gs).

$$(5)\qquad \frac{c}{v_{fz}\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{v_{gz}\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} = \frac{\lambda}{\lambda_{fz}\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{\lambda_{gz}\sqrt{\varepsilon\mu}}{\lambda} = \cos\theta,$$

$$(6)\qquad \frac{c}{v_{fs}\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{v_{gs}\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} = \frac{\lambda}{\lambda_{fs}\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{\lambda_{gs}\sqrt{\varepsilon\mu}}{\lambda} = \sin\theta \qquad (\lambda_{fs} = \lambda_s).$$

2° La longueur d'onde de coupure est la longueur d'onde de phase de section droite;

3° Le régime de vibration de section droite, défini à l'aide de λ_s (C. F. membrane ou écouteur téléphonique), se déplace suivant Oz à la vitesse v_{fz};

---

(1) E. T. WHITTAKER et G. N. WATSON, *Modern analysis*, 4e édit., 1946, Chap. 18.6.

4° Z étant l'impédance d'une onde plane libre (377 ohms dans le vide), l'impédance d'onde Z_z dans la direction Oz, rapport des composantes de section droite des champs électrique et mécanique, est égale au produit (onde E) ou au quotient (onde H) de Z par $\cos\Theta$;

5° Le problème de la réflexion et de la transmission des ondes sur une discontinuité de section droite (changement de ε, écran conducteur) se ramène aux problèmes connus relatifs à une onde plane tombant obliquement sur un plan indéfini de discontinuité (lois de Descartes-Fresnel).

RADIOÉLECTRICITÉ. — *Modification de la fréquence des ondes radioélectriques au cours de la propagation.* Note de M. **Bernard Decaux** présentée par M. Camille Gutton.

L'on a constaté depuis longtemps que la phase des ondes radioélectriques arrivant à un poste récepteur présentait des fluctuations notables et rapides, pouvant même produire une véritable modification de la fréquence reçue. Dans une Note déjà ancienne ([1]) nous avions signalé les résultats d'expériences effectuées par modulation d'un émetteur radiotéléphonique par un diapason étalon, dont on comparait la phase avant et après transmission. Des fluctuations très importantes avaient été mises en évidence de nuit, en particulier sur le trajet Paris-Alger et retour.

Les perfectionnements très importants apportés tant dans la stabilité des émetteurs que dans la précision des fréquencemètres-étalons permettant désormais d'effectuer des études analogues sur des émetteurs lointains sans avoir recours à un trajet aller et retour. C'est ainsi que l'émetteur de fréquences étalonnées du Bureau of Standards à Washington transmet en permanence sur les fréquences 5, 10, 15, 20, 25, 30 Mc/s avec une précision de $\pm 2.10^{-8}$. Nous avons mesuré systématiquement la fréquence à la réception de ces émissions, au moyen d'un dispositif permettant d'apprécier des écarts de fréquence de 0,02 c/s. L'onde reçue bat avec l'un des harmoniques 50, 100, 150, 200, 250, 300 d'un oscillateur à quartz dont la fréquence est de 100014 c/s. La note de battement produite est ainsi voisine d'un multiple de 700 c/s. Elle produit des secteurs lumineux sur l'écran d'un oscillographe cathodique balayé circulairement à environ 700 c/s par un générateur réglable de très haute stabilité, à résistances et capacités. En le réglant de façon à obtenir l'immobilité des secteurs, et en vérifiant avant chaque mesure un point de sa graduation, on peut déterminer facilement en 15 secondes environ la note de battement à 0,02 c/s près, même dans le cas d'une réception faible et brouillée, à condition que la phase de l'onde reçue soit assez stable. La fréquence de l'oscillateur à quartz

---

([1]) *Comptes rendus*, **198**, 1934, p. 2239.

est vérifiée en permanence par comparaison aux horloges de l'Observatoire de Paris et à plusieurs autres oscillateurs à quartz avec une précision de l'ordre de 1.10^{-8}.

Les expériences ont montré en premier lieu des instabilités de phase d'autant plus marquées que la fréquence de l'émission est plus basse. D'autre part, les mesures effectuées presque tous les jours vers 9^h et 17^h T. M. G. depuis plus de deux mois ont mis en évidence une variation diurne très nette de la fréquence reçue, la fréquence reçue le matin étant, à de très rares exceptions près, plus élevée que la fréquence reçue le soir; la variation est en moyenne de 6.10^{-8} et a dans certains cas dépassé 20.10^{-8}. Il y a lieu de souligner également que les fréquences mesurées à un même moment sur les diverses longueurs d'onde de l'émetteur, et rapportées à un facteur commun, présentent souvent entre elles des différences relatives importantes, pouvant atteindre 25.10^{-8}, alors qu'elles sont produites par les harmoniques d'un oscillateur unique. En général la fréquence mesurée le matin sur l'émission de 5 Mc:s (inaudible à 17^h) est notablement supérieure à celles des autres émissions; du 22 décembre au 15 janvier la différence a été en moyenne de 8.10^{-8}.

Pour étudier plus en détail la variation diurne, nous avons effectué pendant une journée des mesures toutes les heures entre 6^h30^m et 22^h30^m T. M. G. Elles ont confirmé les résultats des mesures journalières et montré un maximum assez rapide vers 8^h et un minimum pratiquement plat entre 13^h30^m et 21^h, l'écart entre les deux étant d'environ 15.10^{-8}.

Les mesures se poursuivent et des expériences nouvelles vont être entreprises pour préciser la nature des phénomènes observés, en particulier les différences entre les diverses longueurs d'onde.

RADIOÉLECTRICITÉ. — *L'influence du vent sur la fréquence des ondes radioélectriques*. Note de M. **Raymond Jouaust**, présentée par M. Camille Gutton.

Les variations de fréquence constatées par M. Decaux sur les émissions faites aux États-Unis sont incompatibles avec celles que peuvent présenter les étalons conservés dans un laboratoire. Il convient donc d'en chercher la cause dans qnelques phénomènes se produisant sur le trajet de ces ondes.

Nous croyons en trouver l'origine dans les vents qui existent dans la haute atmosphère.

On sait que la propagation des ondes à grande distance est provoquée par leur rencontre avec la couche ionisée située à plusieurs centaines de kilomètres d'altitude et qu'on dénomme l'ionosphère. Lorsque les ondes rencontrent l'ionosphère, elles cèdent en totalité leur énergie électromagnétique aux électrons. Ceux-ci rayonnent, agissant par rapport à la réception comme des

sources secondaires. On conçoit que par suite d'un vent qui peut entraîner des électrons dans un sens ou dans l'autre, il doit se produire un effet Döppler. Un vent d'une centaine de mètres à la seconde suffit pour expliquer les variations observées.

On sait, d'autre part, par l'observation des queues de météorites que des vents violents se produisent dans la haute atmosphère. D'autre part pour expliquer par la dynamo-théorie les variations diurnes du magnétisme terrestre, il est nécessaire d'admettre des mouvements généraux à peu près réguliers dans les hautes régions de l'atmosphère.

OPTIQUE MOLÉCULAIRE. — *Sur la diffusion des ondes sphériques dans un milieu dispersif.* Note ([1]) de M. **Maurice Lévy**, présentée par M. Jean Cabannes.

Dans une Note précédente ([2]) nous avons été conduit à considérer l'amortissement que subit, en se propageant dans un milieu dispersif, isotrope et non absorbant, l'onde sphérique du dipôle induit dans une molécule par une onde lumineuse plane incidente. Nous calculons ici cet amortissement en conservant le langage de l'optique moléculaire, bien que ce calcul soit général et s'applique également à d'autres domaines.

Nous appelons *facteur d'amortissement d'une onde sphérique* une fonction $f(x, y, z)$ telle que l'amplitude moyenne du champ électrique en un point de coordonnées x, y, z, soit $E_0 f(x, y, z)$, E_0 étant l'amplitude moyenne à l'origine. Nous distinguons deux facteurs d'amortissement : le premier $f(x, y, z)$, que nous appelons *facteur d'amortissement partiel*, est dû à la diffusion secondaire de l'onde sphérique, les interactions ultérieures entre le dipôle-source et les dipôles diffusants étant négligées. Nous appelons *facteur d'amortissement global*, $F(x, y, z)$, celui qui décrit la diffusion de l'onde sphérique, compte tenu de ces interactions.

1° *Calcul du facteur d'amortissement partiel.* — L'onde plane incidente induit dans la molécule (assimilée à une sphère de rayon a dont le centre est pris pour origine) un dipôle de la forme $\alpha \vec{E}_0 \cos 2\pi\nu t$. Le champ électromagnétique produit par ce dipôle est de révolution autour de $\vec{E}_0$. Nous écrivons donc le facteur d'amortissement $f(r, \theta)$, où r est le rayon-vecteur et θ l'angle que fait celui-ci avec le champ polarisant.

Le flux moyen d'énergie rayonné par seconde par une molécule située au point (r, θ) a pour valeur

$$(1) \qquad s(r, \theta) = \frac{16\pi^4\nu^4}{3c^3}\alpha^2 E_0^2 \frac{f^2(r, \theta)}{r^2} \times \left[\sin^2\theta\left(\frac{1}{r^4} - \frac{4\pi^2\nu^2}{c^2 r^2} + \frac{16\pi^4\nu^4}{c^4}\right) + 4\cos^2\theta\left(\frac{1}{r^4} + \frac{4\pi^2\nu^2}{c^2 r^2}\right)\right].$$

([1]) Séance du 12 janvier 1948.

([2]) *Comptes rendus*, 226, 1948, p. 236.

Le flux incident au même point par unité de surface et par seconde s'écrit

(2) $$S(r, \theta) = \frac{2\pi^3\nu^4}{c^3}\alpha^2 E_0^2 \frac{f^2(r, \theta)}{r^2}\sin^2\theta.$$

On en déduit l'équation

(3) $$\frac{\partial}{\partial r}S(r, \theta) + N s(r, \theta) = 0,$$

où N est le nombre de molécules par unité de volume. D'où

(4) $$f(r, \theta) = \exp\left\{\frac{4\pi}{3}N\alpha^2\left[\left(\frac{1}{3r^3} - \frac{4\pi^2\nu^2}{c^2 r} - \frac{16\pi^4\nu^4}{c^4}r\right) + \frac{4}{\operatorname{tg}^2\theta}\left(\frac{1}{3r^3} + \frac{4\pi^2\nu^2}{c^2 r}\right) - \left(\frac{1}{3a^3} - \frac{4\pi^2\nu^2}{c^2 a} - \frac{16\pi^4\nu^4}{c^4}a\right) - \frac{4}{\operatorname{tg}^2\theta}\left(\frac{1}{3a^3} + \frac{4\pi^2\nu^2}{c^2 a}\right)\right]\right\},$$

compte tenu de la condition-limite $f(a, \theta) \equiv 1$.

Les caractéristiques suivantes sont à souligner :

a. A très grande distance, le facteur d'amortissement coïncide avec celui d'une onde plane.

b. L'onde qui se propage n'est plus à proprement parler sphérique, les surfaces d'égale amplitude ayant une forme plus compliquée. En particulier, l'amplitude du champ rayonné suivant la direction de $\overrightarrow{E_0}$ est nulle.

c, L'espace se répartit en trois zones, dans chacune desquelles les facteurs en $1/r^3$, $1/r$ et r prédominent respectivement. Cependant les termes indépendants de r sont les plus importants, sauf au voisinage immédiat de la molécule ou à une distance très lointaine, supérieure, pour la lumière visible, à $10^6\lambda$. En effet, comme $(4\pi/3)N\alpha^2 \approx [a^3(n^2-1)/(n^2+2)]$, ces termes sont de l'ordre de (n^2-1), alors que pour $r \approx \lambda$ par exemple, les termes en r sont tous de l'ordre de a^3/λ^3.

2° *Calcul du facteur d'amortissement global.* — La partie du flux rayonné dans l'unité de temps par la molécule située au point (r, θ) qui sort de la sphère de rayon r, centrée sur l'origine, compte tenu des interactions de cette molécule avec celles qui sont situées à l'intérieur de la sphère, s'écrit

(5) $$s_1(r, \theta) = \frac{8\pi^4\nu^4}{3c^3}\alpha^4 E_0^2[1 + U(r, \theta)]\frac{F^2(r, \theta)}{r^2} \times\left[\sin^2\theta\left(\frac{1}{r^4} - \frac{4\pi^2\nu^2}{c^2 r^2} + \frac{16\pi^4\nu^4}{c^4}\right) + 4\cos^2\theta\left(\frac{1}{r^4} + \frac{4\pi^2\nu^2}{c^2 r^2}\right)\right],$$

avec

$$U(r, \theta) = \frac{3}{4\pi}\int_{\psi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\sin^3\psi[F(\rho, u)]^2\, d\psi\, d\varphi,$$

et

(6) $$\rho = 2r\cos\psi, \qquad \cos u = \sin\psi\sin\varphi\sin\theta - \cos\psi\cos\theta.$$

Le flux absorbé par unité de temps par interaction avec les molécules de la

sphère de rayon r centrée sur l'origine est donc égal à

$$(7)\qquad s_2(r,\theta)=\frac{8\pi^4\nu^4}{3c^3}\alpha^4 E_0^2[1-U(r,\theta)]\frac{F^2(r,\theta)}{r^2}$$
$$\times\left[\sin^2\theta\left(\frac{1}{r^4}-\frac{4\pi^2\nu^2}{c^2r^2}+\frac{16\pi^4\nu^4}{c^4}\right)+4\cos^2\theta\left(\frac{1}{r^4}+\frac{4\pi^2\nu^2}{c^2r^2}\right)\right].$$

On obtient une équation d'équilibre identique à (3), dans laquelle $S(r,\theta)$ est donné par une expression analogue à (2), mais où $s(r,\theta)$ doit être remplacé par $s_2(r,\theta)$. C'est une équation intégrodifférentielle, que l'on peut simplifier en posant $F(r,\theta)=e^{-\Phi(r,\theta)}$, d'où

$$(8)\qquad\left[\left(\frac{1}{r^4}-\frac{4\pi^2\nu^2}{c^2r^2}+\frac{16\pi^4\nu^4}{c^4}\right)+\frac{4}{\mathrm{tg}^2\theta}\left(\frac{1}{r^4}+\frac{4\pi^2\nu^2}{c^2r^2}\right)\right]^{-1}\frac{\partial}{\partial r}\Phi(r,\theta)$$
$$=\frac{N\alpha^2}{2}\int_{\psi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\sin^3\psi[1-e^{-2\Phi(\rho,u)}]\,d\psi\,d\varphi,$$

où ρ et u sont définis par les équations (6). Il faut lui adjoindre la condition limite : $\Phi(a,\theta)\equiv 0$.

Nous n'entreprendrons pas ici la résolution de cette équation : $F(r,\theta)$ possède des caractéristiques analogues à celles que nous avons soulignées pour l'amortissement partiel. En faisant $\nu=0$ dans l'équation (8), on obtient l'équation d'équilibre des interactions électrostatiques entre dipôles.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Sur l'observation et l'origine d'un dédoublement de* 30 cm^{-1} *des bandes électroniques des sels d'uranyle.* Note [1] de Mme **Marie Freymann**, présentée par M. Aimé Cotton.

Nous avons montré précédemment [2], [3] que les bandes électroniques des sels d'uranyle peuvent être classées à partir des fréquences de vibration $\nu_2=210$, $\nu_1=860$ et $\nu_3=930$ cm^{-1} et de leurs combinaisons. En outre, nous avions signalé brièvement la nécessité de leur adjoindre une fréquence voisine de 30 cm^{-1} qui n'avait pas été indiquée par d'autres auteurs. C'est sur ce point que nous nous proposons de revenir ici.

Le dédoublement de 30 cm^{-1} *s'observe* (*à* — 185°C.) *pour de très nombreuses bandes de fluorescence et d'absorption de l'acétate, du nitrate, du chlorure, du fluorure, etc.* — C'est ce qu'indique le Tableau ci-contre, dans le cas particulièrement net des bandes de fluorescence $(1.1)\rightarrow(0.v')$ et $(1.0)\rightarrow(0.v')+\nu_2$.

---

(1) Séance du 12 janvier 1948.

(2) Mmes M. Freymann, T. Guilmart, et R. Freymann, *Comptes rendus*, **223**, 1946, p. 543 et 573.

(3) *Comptes rendus*, **225**, 1947, p. 529.

Acétate.....	20627 20588 20563	39 25	19767 19735 19704	32 31	18907 18867 18850	40 17						
Nitrate.....	20623 20589	34	19724 19708	16	18896 18861	35	18036 18000	36	17184 17150	34	16313 16292	21
Chlorure...	20589 20565 20535 20511 20482	24 30 24 29	19716 19685 19655 19628	31 30 27	18834 18803 18777	31 26						
Acétate.....			19646 19623	23	18782 18765	22	17936 17912	24	17098 17066	32		
Nitrate.....			19646 19619	27	18797 18772	25	17937 17905	32	17085 17065	20	16221 16194	27
Chlorure...	20462 20440	22										
Fluorure II.			19150 19124	26	18289 18263	26	17427 17404	23				

Le même dédoublement de 30 cm^{-1} se retrouve d'ailleurs en absorption ([2]), ([3]); soulignons tout particulièrement que, pour l'acétate, *le saut* $(1.1)\rightarrow(0.0)+30$ *apparaît à* 20 732 cm^{-1} *par fluorescence alors que* $(1.1)\leftarrow(0.0)$ *apparaît à* 20756 cm^{-1} *en absorption, soit une différence de* 24 cm^{-1}.

L'existence de ce dédoublement de 30 cm^{-1} *environ nous semble donc définitivement établie;* mais il reste à en rechercher l'origine. Trois hypothèses peuvent être envisagées :

1° L'hypothèse d'une décomposition des bandes par effet Stark (dû au champ cristallin) pourrait être proposée ([4]). Elle aurait l'avantage d'interpréter aisément les cinq composantes du chlorure. Mais il semble que cette hypothèse ne peut être retenue. D'une part il est peu vraisemblable que l'effet du champ cristallin soit du même ordre de grandeur pour des sels aussi différents. D'autre part, il n'est pas possible de rendre compte de la différence signalée plus haut pour l'acétate : 20 732 et 20 756.

2° Une coïncidence plus troublante est la suivante : la fréquence de déformation (Raman) du chlorure est double : $\nu'_2=197$, $\nu'_2=226$ cm^{-1}, soit une différence de 29 cm^{-1} ([4]) ; en outre les spectres de fluorescence du chlorure prouvent l'existence des deux fréquences $\nu'_1=850$ et $\nu_1=875$ cm^{-1} ([5]), ([3]), soit une différence de 25 cm^{-1}. On pourrait donc être tenté de les relier à deux des composantes observées en fluorescence ou en absorption. Cette conception se

([4]) Satyanarayana, *Proc. Indian Ac. Sc.*, 15, 1942, p. 414, et *J. Mysore Univ.*, 4, 1943, p. 57.

([5]) Pant, *Proc. Indian Ac. Sc.*, 22, 1945, p. 95 et 110.

heurte toutefois aux difficultés suivantes : la plus importante, c'est l'impossibilité d'expliquer les *cinq* composantes du chlorure. Une autre objection résulte de l'interprétation que nous avons donnée ([3]) du dédoublement 197-226 et 850-875 cm^{-1} : Existence de deux formes d'ions UO^{2++} ; il semble impossible que des sauts électroniques se produisent entre des niveaux qui correspondraient à des oscillations différentes.

3° L'hypothèse qui nous semble la plus satisfaisante est la suivante : il conviendrait d'adjoindre aux fréquences 210,860 et 930 cm^{-1} *la fréquence* 30 cm^{-1} *qui correspondrait à une fréquence propre du réseau cristallin*. Cette hypothèse ne rencontre aucune des critiques que nous avons opposées aux précédentes : on rend compte du dédoublement 20732-20756 de l'acétate par les sauts sur des niveaux distants de 30 cm^{-1} ; on explique les cinq composantes du chlorure par l'existence de combinaisons 30 + 30 + 30 + 30 analogues à celles envisagées pour les trois fréquences 210, 860 et 930. Il est d'ailleurs possible de vérifier notre hypothèse : Nous avons essayé de déceler 30 cm^{-1} à l'aide de l'effet Raman; mais la fluorescence et surtout le fond continu intense accompagnant la raie excitatrice (raie verte) ne nous a pas permis jusqu'à présent cette vérification. Il faudra donc rechercher la fréquence 30 cm^{-1} dans l'absorption infrarouge, vers 330^{μ} environ.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Dosage et étude magnétochimique des éthylsulfates et des alcoylsulfates*. Note ([1]) de MM. **Nguyen-Quang Trinh** et **Maurice Seguin**, présentée par M. Paul Pascal.

Pour contrôler la composition et la pureté des éthylsulfates et des divers alcoylsulfates que nous avons obtenus sous la forme *stabilisée* ([2]), nous avons été amenés à chercher différentes méthodes de dosage. La première qui s'impose est le dosage du radical sulfate par neutralisation d'une solution aqueuse de sel par une solution alcaline. Mais la neutralisation est lente et incomplète; aussi faut-il prendre la précaution de porter à ébullition la solution à chaque addition d'alcali et une fois le virage effectué, de le contrôler au bout de plusieurs heures de repos. Une seconde méthode est la calcination des sels et la pesée des résidus de sulfate. Ces deux procédés quoique précis (l'erreur relative est inférieure à 3 %) sont lents et nous avons pensé à doser le radical alcoyl par une méthode rapide inspirée de celle de Nicloux ([3]), utilisée pour le dosage de l'alcool dans le chloroforme : Si l'on ajoute du bichromate de potassium successivement et par très petites quantités à une solution alcoolique diluée en présence d'acide sulfurique, dès que l'alcool est complètement oxydé,

---

([1]) Séance du 19 janvier 1948.

([2]) Nguyen Quang Trinh, *Comptes rendus*, 222, 1946, p. 897.

([3]) *Bull. Soc. Ch.*, 35, p. 331.

le bichromate n'entre plus en réaction, et, ce point atteint, un très petit excès de bichromate, grâce à la puissance de sa coloration, communique à la teinte vert bleu franche du sulfate de sesquioxyde de chrome une teinte jaunâtre.

Dans un tube à essai, introduisons 5^{cm^3} d'une solution d'éthylsulfate (teneur d'alcool environ 2^{cm^3} pour 1000 de solution, proportion pour laquelle la différence de teinte est la plus facile à apprécier), ajoutons 5^{cm^3} d'acide sulfurique 66° Bé, puis 1^{cm^3} environ de bichromate à 19^g par litre. Le virage s'effectue (ajouter au besoin de l'acide sulfurique et chauffer). Ajoutons d'autre bichromate en ayant soin d'agiter et de chauffer très légèrement à l'ébullition après chaque addition de bichromate, et cela jusqu'au moment où la teinte passe du vert bleu au vert jaune persistant. Si n est le nombre de centimètres cubes de bichromate introduit, nous avons $n/100^{cm^3}$ d'alcool absolu par centimètre cube de solution; nous en déduisons le poids d'alcool et la quantité d'éthylsulfate dans la solution. L'erreur relative ne dépasse pas 1/100 et l'opération nécessite à peine une demi-heure.

La pureté des alcoylsulfates obtenus étant contrôlée, nous en avons fait l'étude magnétochimique. Le corps de référence est l'eau bidistillée

$$(k_s = -0,72.10^{-6}),$$

et les valeurs des susceptibilités des ions utilisées pour le calcul sont celles adoptées par Pascal :

Ions	Na.	K.	Sr.	Ca.	Ba.	SO^4.
$-10^{-6}K_i$	9,2	18,5	24,5	16	38,2	33,6

Nous avons obtenu les résultats suivants :

Alcoylsulfate.	Formule.	$-10^{-6}X_m$ calculé.	$-10^{-6}X_m$ mesuré.	Erreur relative.
Ethylsulfate de Na	$C_2H_5SO_4Na$	69,5	71	2,1 %
» K	$C_2H_5SO_4K$	78,8	79	0,25
» S_2	$C_2H_5SO_4S_2$	84,8	83,9	1
» Ca	$(C_2H_5)_2(SO_4)_2Ca$	136,5	134,9	1,2
» Ba	$(C_2H_5)_2(SO_4)_2Ba$	158,7	159,9	0,8
Propyl » Ba	$(C_3H_7)_2(SO_4)_2Ba$	182,4	182,1	0,17
$Butyl_1$-sulfate de Ca	$(C_4H_9)_2(SO_4)_2Ca$	183,9	182,0	1
$Butyl_2$ » Ba	$(C_4H_9)_2(SO_4)_2Ba$	206,1	203,8	1,1
Isoamyl » Ba	$(C_5H_{11})_2(SO_4)_2Ba$	229,9	232,9	1,3

Par rapport à la systématique de Pascal, les erreurs relatives sont donc inférieures à 1,5 % sauf, pour l'ion Na; ceci semblerait indiquer que la valeur généralement adoptée $K_i = -9,2.10^{-6}$ est un peu faible. Ces alcoylsulfates, qui comportent dans leur édifice moléculaire une partie organique et une partie minérale, forment donc une longue série homologue qui obéit à la loi d'additivité des susceptibilités magnétiques. Cette obéissance à la loi montre que l'ion SO_4 ici encore garde une individualité magnétique constante, que le radical alcoylsulfate $SO^4{<}^{R}$ possède une susceptibilité magnétique bien définie dans toutes ses combinaisons et qu'*a priori* dans l'édifice des alcoylsulfates il ne semble pas y avoir de liaisons spéciales qui s'établiraient entre électrons, en diminuant leur degré de liberté.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Sur la précipitation double des sels manganeux par les chromates alcalins.* Note de Mlle **Suzanne Veil**, présentée par M. Charles Mauguin.

L'analyse plane des précipités dans la gélatine, antérieurement entreprise ([1]) sur le chromate d'argent et sur le phosphate de baryum, est applicable aux précipités contenant plus d'un individu chimique. Présentement, elle a été étendue au précipité résultant de l'attaque des sels manganeux par les chromates alcalins, précipité dans lequel Wunschendorff et Mme Valier ([2]) ont identifié du bichromate manganeux Cr_2O_7Mn et du manganite de chrome $(MnO_3)_3Cr_2$. L'analyse plane met en évidence le caractère doublement périodique de la précipitation. Dans des conditions appropriées, le bichromate manganeux et le manganite de chrome, tous deux aptes à se répartir en anneaux, sont bien discernables à la couleur, comme à l'aspect général et microscopique. Les deux systèmes d'anneaux ne se montrent pas indépendants, ainsi que le laisse prévoir leur commune origine; leur connexion évoque celle des anneaux principaux et secondaires de Liesegang, encore que moins étroite et moins régulière.

Par apposition d'une goutte de CrO_4K_2 sur de la gélatine imprégnée de SO_4Mn, on n'obtient à la fois bichromate manganeux et manganite de chrome qu'entre certaines limites de la concentration du sel manganeux dans le gel. Lorsque le gel est trop pauvre en SO_4Mn, le bichromate manganeux précipite seul, et ses anneaux rubis, dessinés par des entités cristallines distinctes, invalident parfois la loi générale de distribution au point de se resserrer en s'éloignant de la goutte, conformément aux indications de certaines des expériences de Deiss ([3]) dans le papier-filtre. D'autre part, les gels, trop riches en SO_4Mn, ne fournissent que du manganite de chrome. Les gros anneaux noirs et diffus du manganite de chrome, très dissemblables de ceux du bichromate manganeux, sont résolubles au microscope en amas de cristallicules. Sans être, non plus, forcément régis par la loi générale de distribution, ils ont tendance à se border d'anneaux de bichromate manganeux dont la propre répartition, en présence de manganite de chrome, s'accuse toujours assez mal. D'une manière générale, les concentrations des réactifs semblent conditionner, dans une large mesure, les épisodes particuliers de la double réaction.

Les anomalies de distribution des deux systèmes d'anneaux sont interprétables sur la base de précédents résultats ([4]). On peut envisager des répercus-

---

([1]) *Comptes rendus*, 223, 1946, p. 84; 224, 1947, p. 113 et 740.

([2]) *Bull, Soc. Chim.*, 53, 1933, p. 1504.

([3]) *Koll. Zeits.*, 89, 1939, p. 146.

([4]) *Comptes rendus*, 224, 1947, p. 1171.

sions réciproques des deux précipitations individuelles, se traduisant par des altérations locales de la concentration de SO_4Mn dans la gélatine, avec perturbations consécutives des distributions annulaires correspondantes.

Très au delà de l'auréole de précipitation proprement dite, apparaît encore, après quelque temps, une couronne rougeâtre plus ou moins foncée et dépourvue de relief. Cette formation tardive, dont les circonstances de génération semblent assez différentes de celles des anneaux décrits ci-dessus, suggère l'éventualité, dans le précipité global, d'un nombre de phases coexistantes supérieur à deux.

CHIMIE COLLOÏDALE. — *Mesures rhéologiques sur quelques solutions de goudron et brai de houille.* Note [1] de MM. **Félix Kauer** et **Henri A. Sack**, présentée par M. Louis Hackspill.

Les mesures de viscosité effectuées sur des goudrons et sur des solutions de goudron et brai, à l'aide d'un appareil du type Couette, à vitesse de rotation variable [2], nous ont permis de constater de nombreux écarts par rapport à l'état purement newtonien.

Dans le cas du goudron brut déshydraté et des dilutions de goudrons avec de faibles quantités de benzène (avant la zone de coagulation), nous avons trouvé, pour les vitesses de rotation utilisées, que la fonction $\Omega = f(G)$, (Ω, vitesse de rotation angulaire; G, couple), est une droite dont l'extrapolation pour $\Omega = 0$ donne une valeur positive de G (*fig.* 1). Néanmoins les mesures effectuées par un procédé statique ne nous ont pas permis de déceler l'existence d'une limite élastique. Il doit s'agir d'un cas de viscosité de structure au sens d'Ostwald [3]. D'après la classification du British Rheologists' Club, ces systèmes doivent être considérés comme non newtoniens, *visco-élastiques ou inélastiques* (les *post-effets* élastiques n'étant pas mesurables avec l'appareil utilisé).

Dans les limites de la zone de coagulation, pour des mélanges de goudron-benzène ($30\% <$ concentration en goudron $< 75\%$), on observe une limite élastique mesurable (*fig.* 2). Pour les faibles vitesses de rotation, $\Omega/G = \text{const.}$, pour les fortes vitesses, Ω/G diminue en fonction de l'accroissement de Ω (phénomène de thixotropie inverse, *dilatancy*). Toutefois, les courbes effectuées d'une façon continue à vitesse croissante, puis décroissante, sont superposables. Il n'est pas possible d'observer de cycle d'hystérésis. D'après la nomenclature du B. R. C., ces courbes ne suivent pas la loi de Bingham et sont désignées

(1) Séance du 19 janvier 1948.

(2) B. Persoz et F. Kauer, *Comptes rendus*, 225, 1947, p. 236-237; F. Kauer, *C. R. Congrès Technique International de l'Industrie des Peintures et des Industries associées*, Paris, 1947 (sous presse).

(3) Pour la bibliographie rhéologique, voir Scott Blair, *A. Survey of General* and *Applied Rheology*, Pitman, Londres, 1945.

comme plasto-élastiques ou inélastiques. La forme des courbes $\Omega = f(G)$ peut être interprétée en la comparant à celle des courbes $G = f(\text{concentration})$

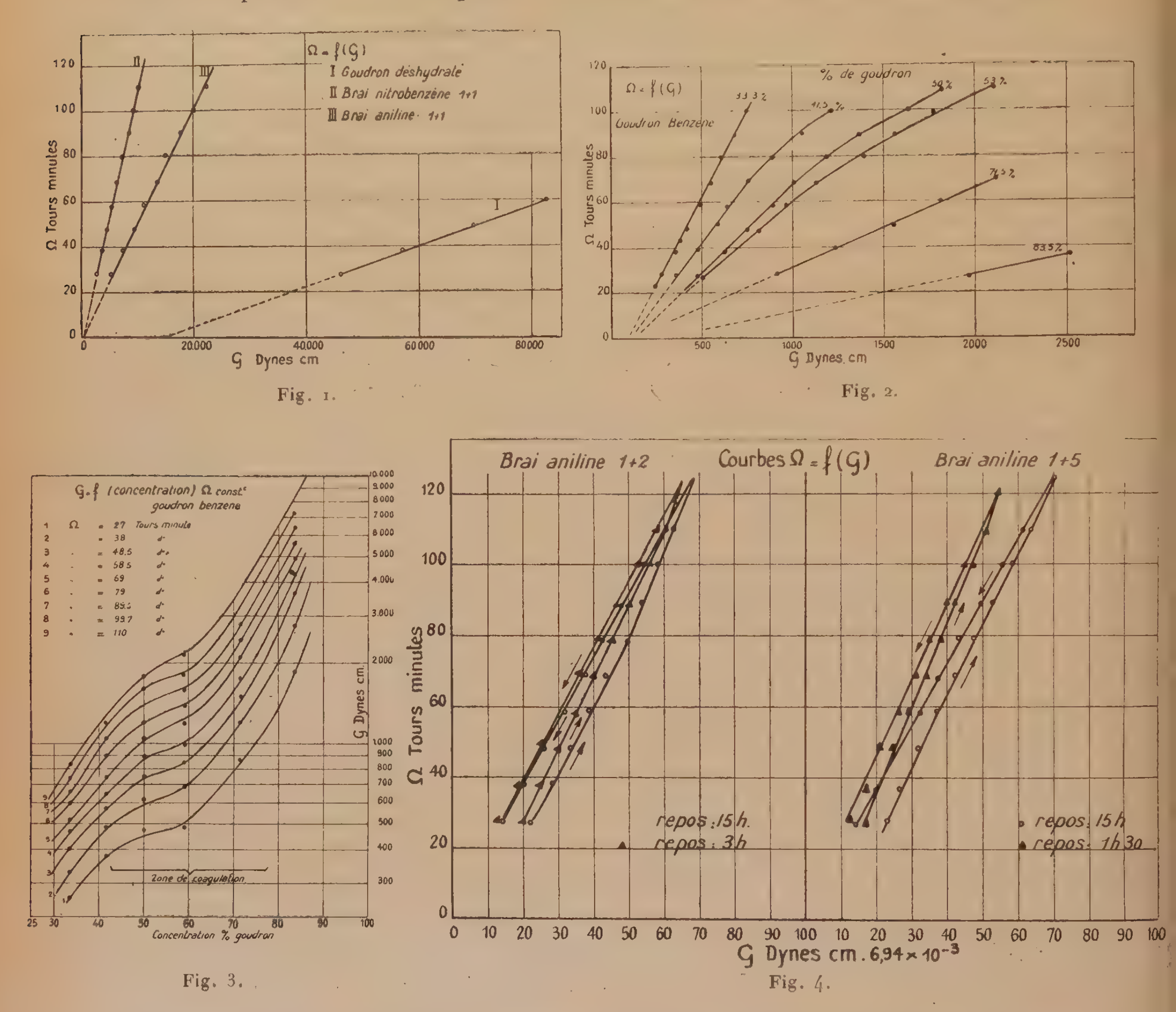


Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

pour $\Omega = \text{const}$. Le domaine de coagulation est caractérisé dans ce cas par une zone d'inflexion (*fig.* 3). Pour les fortes valeurs de Ω, cette inflexion a cependant tendance à disparaître.

Le brai et le goudron de houille en solution aromatique polaire donnent des courbes parfaitement newtoniennes ($\Omega/G = \text{const.}$).

Les solutions diluées de brai de houille dans l'aniline font exception (*fig.* 4). Elles donnent les cycles caractéristiques de l'hystérésis de thixotropie, Ω/G pour Ω croissant $> \Omega/G$ pour Ω décroissant. Ces courbes sont reproductibles; l'écart entre la branche *aller* et la branche *retour* dépend du temps de repos pour une accélération constante.

L'analyse rhéologique fait donc apparaître l'importance de la polarité du solvant sur le type de la solution, phénomène que l'un de nous a déjà pu constater à plusieurs reprises et qu'il a pu interpréter ([4]).

CHIMIE THÉORIQUE. — *Sur le calcul de la répartition électronique dans le noyau pyridique par la méthode de Wheland-Pauling.* Note ([1]) de M. **Jean Ploquin**, présentée par M. Paul Pascal.

Dans une Note antérieure, j'ai montré que la méthode de Wheland-Pauling, pour le calcul des densités électroniques au voisinage de chaque atome nucléaire dans la pyridine, conduisait à une valeur du moment dipolaire trop élevée. Cela tient en partie aux hypothèses formulées par les auteurs américains. Mais si l'on fait intervenir, non seulement une influence inductive ($d_2 = d_6$) sur les atomes en ortho par rapport à l'atome hétérocyclique perturbateur (d_1), mais aussi une influence d_4 sur l'atome en para, on peut alors calculer la répartition des charges suivantes :

$$C_N = C_1 = e\left(1 + \frac{43}{108} d_1 - \frac{34}{108} d_2 - \frac{11}{108} d_4\right),$$

$$C_\alpha = C_2 = C_6 = e\left(1 - \frac{17}{108} d_1 + \frac{44}{108} d_2 + \frac{1}{108} d_4\right),$$

$$C_\beta = C_3 = C_5 = e\left(1 + \frac{1}{108} d_1 - \frac{28}{108} d_2 - \frac{17}{108} d_4\right),$$

$$C_\gamma = C_4 = e\left(1 - \frac{11}{108} d_1 + \frac{2}{108} d_2 + \frac{43}{108} d_4\right).$$

Supposer $d_4 \neq d_2 = d_6$ traduit bien une propriété essentiellement aromatique. On retrouve alors la polarisation alternée des atomes nucléaires :

$$C_N = e\left(1 + \frac{43}{108} d_1 - \frac{45}{108} d_2\right) = C_N^0 - E,$$

$$C_2 = e\left(1 - \frac{17}{108} d_1 + \frac{45}{108} d_2\right) = C_2^0 + E,$$

$$C_3 = e\left(1 + \frac{1}{108} d_1 - \frac{45}{108} d_2\right) = C_3^0 - E,$$

$$C_4 = e\left(1 - \frac{11}{108} d_1 + \frac{45}{108} d_2\right) = C_4^0 + E.$$

D'où l'on déduit pour le moment électrique :

$$\mu = \left(\frac{36}{108} d_1 + \frac{36}{108} d_2 - \frac{36}{108} d_4\right) 2ae = \frac{2ae}{3} d_1;$$

([4]) H. Sack, *Comptes rendus*, **224**, 1947, p. 833-835 ; **224**, 1947, p. 932-934 ; *C. R. Congrès Technique International de l'Industrie des Peintures et des Industries associées*, Paris, 1947 (sous presse).

([1]) Séance du 12 janvier 1948.

ou

$$\mu = 2,3 d_1 \quad (^2),$$

(1) $$\mu = \mu_{exp} = 2,23 d_1.$$

L'équation (1) permet de définir d_1. Dans le cas de la pyridine, il faut prendre $d_1 = 1$.

Pour déterminer d_2, il suffit d'exprimer que la molécule dans son ensemble est désactivée au profit de N et que les atomes 3 et 5 sont les moins altérés. D'où :

$$\frac{1}{45} < \frac{d_2}{d_1} < \frac{4}{30} \quad (^3).$$

La valeur moyenne $d_2/d_1 = 7/90$ est assez voisine de celle admise intuitivement par Wheland et Pauling (1/10), mais elle semble conduire à une densité électronique en 4 trop voisine de celle en 3 ou 5 et un peu trop différente de celle en 2 et 6. La valeur $d_2/d_1 = 1/20$ lui semble préférable :

	$d_2 : d_1 = 1/10$.	$d_2 : d_1 = 1/20$.
C_N	1,357.e	1,38 .e
C_2	0,885.e	0,863.e
C_3	0,968.e	0,989.e
C_4	0,938.e	0,918.e

En comparant avec les valeurs données antérieurement, on voit que faire intervenir d_4 accentue les différences entre les densités électroniques. Les positions 2 et 6 sont les plus désactivées, ensuite le carbone 4 puis les atomes 3 et 5; d'une façon générale (pour les réactifs électrophiles) C_3 et C_5 sont plus actifs que C_4, C_2 ou C_6.

Toutefois au point de vue chimique, il ne faut pas chercher dans ces calculs une prévision précise des réactivités, mais seulement de l'orientation des substitutions; en effet, on considère ici la molécule dans son état fondamental le plus stable (on associe les électrons aux valeurs de l'énergie données par l'équation séculaire, en commençant par les plus faibles), alors que la molécule est dans un état énergétique supérieur au moment où elle entre en réaction. C'est vraisemblablement là qu'il faut chercher la petite correction nécessaire pour expliquer que C_2 et C_6 sont plutôt plus réactifs que C_4, alors que les calculs précédents semblent indiquer le contraire. Ces réserves faites, ces résultats sont valables pour la molécule considérée isolément, et c'est ce qui nous a conduit à faire intervenir le moment dipolaire, dont la mesure ne change pas l'état énergétique de la molécule.

---

(2) Il est remarquable que le moment électrique ne dépende que de d_1 qui caractérise l'affinité électronique de l'élément perturbateur et non des effets inductifs. Il y a peut-être là une possibilité de classification des moments électriques des molécules perturbées en fonction de l'affinité électronique des groupements perturbateurs.

(3) Ces conditions remplacent les conditions de Wheland et Pauling $1/28 < d_2/d_1 < 1/4$.

CHIMIE GÉNÉRALE. — *Sur l'inflammabilité des mélanges de cyanogène et d'air; influence de l'humidité*. Note de **MM. Guy Pannetier** et **Paul Laffitte**, présentée par M. Paul Pascal.

A la suite d'études spectrographiques récentes ([1]) sur la flamme des mélanges de cyanogène et d'oxygène, additionnés ou non d'hydrogène ou de vapeur d'eau, et ayant permis de mettre en évidence des réactions entre les radicaux C_2 ou CN d'une part et l'hydrogène atomique ou l'oxhydrile d'autre part, nous avons exécuté les recherches rapportées dans la présente Note et dont certains résultats peuvent être interprétés par les réactions précédentes.

Nous avons étudié les limites d'inflammabilité des mélanges de cyanogène et d'air que l'on n'avait jusqu'ici mesurées que dans un cas particulier [récipient de petites dimensions avec inflammation centrale ([2])]. Nos déterminations ont été faites à 20° C. dans des tubes en pyrex de 60^cm de longueur et de diamètres variant de 15 à 35^mm. Avant l'introduction du mélange gazeux on y réalisait un vide de 10^{-3} mm de mercure. L'inflammation était provoquée par une étincelle électrique toujours identique à elle-même et jaillissant (à une des extrémités du tube placé verticalement) entre deux électrodes de tungstène distantes de 4 à 5^mm.

Avec du cyanogène pur et sec et de l'*air humidifié* (1,7 % de vapeur d'eau environ), les valeurs obtenues (% C_2N_2) pour la limite inférieure (L_i) et pour la limite supérieure (L_s) sont rassemblées dans le tableau suivant :

Diamètre (mm).	Propagat. ascendante. L_i.	Propagat. ascendante. L_s.	Propagat. descendante. L_i.	Propagat. descendante. L_s.
15.......	7,1	28,35-29,3	7,25	26,2-26,7
20.......	6,55	29,0 -30,1	6,70	27,3-27,9
25.......	6,3	29,8 -31,0	6,45	28,2-28,7
35.......	6,15	30,8 -32,0	6,4	30,1-30,6

Pour les limites supérieures, deux valeurs sont portées sur ce tableau. En dessous de la plus faible, la flamme se propage toujours dans le mélange; elle ne s'y propage jamais au-dessus de la plus élevée. Entre les deux il n'y a pas inflammation si le vide de 10^{-3} mm a été maintenu dans le tube pendant au moins 15 minutes avant l'introduction du mélange. Si, après cet essai négatif, on fait dans le tube un vide de 10^{-2} mm et si l'on y introduit un mélange identique à celui qui ne s'était pas enflammé précédemment, l'inflammation a alors

([1]) G. Pannetier et A. G. Gaydon, *Comptes rendus*, **225**, 1947, p. 1300.

([2]) E. Berl et K. Barth, *Z. Elektrochem.*, **39**, 1933, p. 74.

lieu dès que jaillit l'étincelle et la flamme se propage sur toute la longueur du tube.

Si l'on opère avec du cyanogène et de l'air *desséchés* par contact d'au moins 24 heures avec de l'anhydride phosphorique, on obtient les résultats rassemblés dans le tableau suivant :

Diamètre (mm).	Propagat. ascendante. L_i.	Propagat. ascendante. L_s.	Propagat. descendante. L_i.	Propagat. descendante. L_s.
15	17,25	29,2–30,1	17,7	26,2 –26,6
20	18,0	28,0–28,8	18,5	25,35–25,8
25 / 35	Pas d'inflammation			

On peut d'abord faire, dans ce cas et pour les limites supérieures, les mêmes observations que précédemment dans le cas des mélanges humides. De plus, au voisinage des limites (et surtout pour les mélanges ininflammables) on observe dans la région des électrodes, et dans certains cas sur toute la longueur du tube, des particules lumineuses extrêmement brillantes et subsistant 4 à 10 secondes; il s'agit très probablement de particules de carbone provenant d'une dissociation du cyanogène. On voit enfin sur le tableau précédent que l'étendue du domaine d'inflammabilité *décroît* lorsqu'on augmente le diamètre du tube, les deux limites se rapprochent l'une de l'autre; et, à partir du diamètre de 25^{mm} les mélanges, quelle que soit leur composition, sont *ininflammables*. En remplaçant l'étincelle d'allumage par un filament de tungstène porté au rouge vif par un courant électrique, l'inflammation est possible pour le tube de 25^{mm} de diamètre, mais la détermination précise des limites est impossible; on peut seulement affirmer qu'au-dessous de 19 % et au-dessus de 26 % de cyanogène les mélanges sont ininflammables. Mais à l'intérieur de ce domaine, et après un retard pouvant atteindre 30 secondes après le passage du courant dans le filament d'allumage, il se produit brusquement une explosion extrêmement violente présentant les caractères d'une détonation et non d'une déflagration; en particulier le tube est entièrement pulvérisé en très petits éclats.

Pour interpréter une influence aussi importante de l'humidité sur l'inflammabilité du cyanogène, on est évidemment conduit à admettre que les mécanismes des réactions sont entièrement différents suivant que le mélange est desséché ou non. Des schémas réactionnels tels que ceux qui ont été rappelés au début de cette Note doivent intervenir. Mais la complexité des phénomènes (influence considérable des parois pour les mélanges secs) conduit à supposer que ce ne sont certainement pas les seuls.

CHIMIE ORGANIQUE. — *La liaison C-H dans les acides aliphatiques supérieurs.* Note (¹) de M. **Jean Moretti**, présentée par M. Marcel Delépine.

Dans une précédente Note (²) j'ai montré que le Ni de Raney, chauffé avec les acides gras, donnait lieu à une réaction complexe fournissant entre autres produits 5 à 6 % d'acide déshydrogéné et 25 % environ de carbures correspondants, dont les 2/3 ne sont pas saturés. Je me suis proposé de déterminer la place qu'occupe la double liaison dans les acides et les carbures déshydrogénés; aussi ai-je isolé ces corps de la façon suivante.

Le mélange réactionnel est extrait au Soxhlet avec de la benzine, pour en enlever le Ni. Après élimination de ce solvant, une distillation sous pression réduite fournit un mélange de carbures et d'acides (saturés et non saturés) que l'on sépare en utilisant l'insolubilité des sels de Na des acides gras dans l'éther : les carbures seuls passent en solution et peuvent être isolés à l'état pur. Les sels de soude traités par HCl en solution aqueuse fournissent un mélange d'acides saturés et éthyléniques.

J'ai séparé carbures et acides non saturés de leurs isologues, auxquels ils sont respectivement mélangés, grâce à leurs dérivés bromés que l'on obtient en ajoutant peu à peu au mélange une solution de brome dans le tétrachlorure de carbone. On élimine le solvant, on distille sous pression réduite ($0^{mm},1$ Hg); la substance saturée distille seule sans que se décompose le dérivé bromé qui reste dans le ballon.

Pour débromer, j'ai chauffé, selon une méthode connue (³), le dérivé bromé avec de la poudre de zinc au sein de l'alcool. On isole ainsi les carbures non saturés et les acides éthyléniques obtenus dans la déshydrogénation. Le dosage du brome dans les dérivés bromés indique qu'il s'agit de composés monoéthyléniques.

Pour déterminer la place de la double liaison dans les produits ainsi obtenus, j'ai formé leurs ozonides. Chauffé avec de l'eau, l'ozonide se détruit, la chaîne se coupe entre les deux carbones qui étaient unis par la double liaison :

$$\mathrm{R{-}CH{=}CH{-}R'} \rightarrow \mathrm{R{-}\underset{\displaystyle O}{\underset{|}{CH}}{-}\!{-}\underset{\displaystyle O}{\underset{|}{CH}}{-}R'} \ (\text{les deux O reliés par un pont } {-}O{-}) \rightarrow \mathrm{R{-}CHO + R'{-}CHO}.$$

J'ai oxydé les deux aldéhydes obtenus en les chauffant pendant 3 heures avec de l'eau oxygénée; ce traitement fournit, dans le cas des carbures deux monoacides, dans le cas des acides, un monoacide et un diacide.

(¹) Séance du 19 janvier 1948.

(²) *Comptes rendus*, **226**, 1948, p. 188.

(³) E. Erdmann et F. Bedfort. *Ber. d. Chem. Gesels.*, **42**, 1909, p. 1324-1344.

J'ai identifié les acides provenant de la coupure par ozonisation en déterminant leur poids moléculaire (neutralisation) et leur point de fusion (diacides) ou celui de leur anilide (monoacide).

Les produits obtenus par cette ozonolyse montrent que : l'acide stéarique et l'acide palmitique se déshydrogènent en position 4-5, l'acide laurique en position 3-4. On obtient donc des produits ayant les formules suivantes :

à partir de l'acide en C_{18}.....	$CH_3-(CH_2)^{12}-CH{=}CH-(CH_2)^2-COOH$,
» » C_{16}.....	$CH_3-(CH_2)^{10}-CH{=}CH-(CH_2)^2-COOH$,
» » C_{12}.....	$CH_3-(CH_2)^7-CH{=}CH-CH_2-COOH$.

Dans les carbures, la double liaison occupe la même place que dans les acides correspondants, compte tenu du carboxyle disparu :

l'acide en C_{18} fournit le carbure...	$CH_3-(CH_2)^{12}-CH{=}CH-CH_2-CH_3$;
l'acide en C_{16} fournit..............	$CH_3-(CH_2)^{10}-CH{=}CH-CH_2-CH_3$;
et l'acide en C_{12}..................	$CH_3-(CH_2)^7-CH{=}CH-CH_3$.

Carbures et acides éthyléniques obtenus dans la déshydrogénation se correspondent donc : cela confirme le mécanisme que j'ai exposé précédemment [2]. Le carbure éthylénique provient de l'acide éthylénique correspondant, soit directement par perte de CO_2, soit indirectement : l'hydrogène libéré par la réaction réduit l'acide éthylénique en aldéhyde et alcool qui, ensuite, se décarbonylent au contact du Ni. La prédominance du CO dans les gaz montre que c'est surtout ce deuxième mécanisme qui est réalisé. D'ailleurs, si le carbure éthylénique provenait de la déshydrogénation d'un carbure saturé, il serait déshydrogéné en alpha [4], et, de plus, les gaz contiendraient une bien plus grande quantité de CO_2 puisque ce gaz se produit lors de la formation du carbure saturé par décarboxylation de l'acide.

Cette étude, en outre, situe la zone du minimum d'affinité de la liaison C — H dans les acides gras. Étant données les conditions expérimentales (basse température, catalyseur très actif), les 2H enlevés à la chaîne hydrocarbonée sont certainement ceux dont le couple possède l'énergie de liaison minimum.

L'isomérisation est peu à craindre. D'ailleurs, si elle se produisait, elle amènerait finalement la double liaison à sa place de stabilité maximum, donc, comme le montre la Thermodynamique, à l'endroit où les H ont la moindre énergie de liaison.

Il est remarquable que la déshydrogénation se produise à peu de distance du carboxyle et non vers le centre de la chaîne. Ce résultat était du reste à prévoir, car la double liaison centrale (en position 9 — 10 par exemple dans l'acide oléique) est instable et se déplace aisément sous des influences relativement minimes.

---

[4] Suen et Fan, *J. Am. Chem. Soc.*, 65, 1943, p. 1244.

Ainsi se trouve déterminée, au moins dans les conditions de ce travail, la paire d'atomes d'hydrogène la moins liée aux carbones correspondants. Ce résultat permettra peut-être de faciliter les calculs relatifs à la structure des longues chaînes hydrocarbonées et aussi la tâche de ceux qui poursuivent la déshydrogénation industrielle des corps gras, problème de grande importance.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Isomérisation de glycols α-éthylénique et α'-éthylénique ou arylé sous l'influence du nickel de Raney*. Note (1) de MM. **Joseph Wiemann** et **Georges Laude**, présentée par M. Marcel Delépine.

L'un de nous a montré que le dipropénylglycol peut être isomérisé sur un catalyseur mixte cuivre-thorine en donnant suivant les conditions soit surtout le dibutyryle, soit en même temps le butyrylepropénylcarbinol (2); un travail d'ensemble sur l'isomérisation des glycols α.α'-diéthyléniques symétriques ou dissymétriques facilement accessibles (3) n'a pu être poursuivi; mais nous avons étudié cette transposition en utilisant le nickel de Raney; on connaît, en effet, les résultats obtenus dans ce domaine pour les alcools α-éthyléniques (4); la réaction s'effectue ici par simple distillation sous pression réduite sur le catalyseur. Les résultats obtenus sont les suivants :

Glycols symétriques. — Le dipropénylglycol donne très facilement le dibutyryle $É_{11}$ 58-58°,5; les constantes sont celles déjà signalées (2), la dioxime nous à donné F 179, 8-180°,5 (non corrigé); Blaise indique 181-182° (5). Les rendements obtenus sont 30 % en dibutyryle, on retrouve 30 % de dipropénylglycol inaltéré; mais il se forme en même temps de l'ordre de 15 % de propénylbutyryle carbinol, caractérisé comme il a été dit (2). Le divinylglycol donne l'isomérisation avec beaucoup plus de difficulté; il se forme environ 20 % de dipropionyl $É_{760}$ 129°, dioxime F 185-185°,5. E. Urion (6) mentionne $É_{760}$ 130°, et F 185°; le cétol semble se former ici en quantités très faibles; mais on retrouve près de 75 % de glycol inaltéré.

Glycols dissymétriques. — Le vinylpropénylglycol s'isomérise plus facilement que le composé précédent; mais contrairement à ce que nous attendions le cétol se forme aussi en quantité très faible et nous avons obtenu la dicétone, caractérisée par son point d'ébullition et le point de fusion de la dioxime qui est 165,1-165°,3; on donne 168° et 172° (7).

---

(1) Séance du 19 janvier 1948.

(2) L. Martineau et J Wiemann, *Comptes rendus*, **207**, 1938, p. 243.

(3) J. Wiemann, *Ann. Chim.*, [11], 5, 1936, p. 267.

(4) R. Paul, *Bull. Soc. Chim.*, [5], 7, 1940, p. 337.

(5) E. E. Blaise, *Comptes rendus*, **176**, 1923, p. 1150.

(6) *Ann. Chim.*, [11], 1, 1934, p. 54.

(7) Y. von Braum et G. Manz, *Ber.*, **67**, 1934, p. 1700.

La transposition du phénylpropénylglycol a été étudiée plus en détail; en variant les conditions d'expérience, on a pu avoir jusqu'à près de 40 % de phénylbutyrylcarbinol; il se forme moins de dicétone. Phénylbutyrylcarbinol $C_{11}H_{14}O_2$, $É_{13}$ 131-133°; $d_4^{18°5}$ 1,0536; $n_D^{18°5}$ 1,522; R. M. trouvé 51,52, calculé 50,93; C % calculé 74,15, trouvé 73,33; H % calculé 7,86, trouvé 8,10; semicarbazone $C_{12}H_{17}N_3O_2$, F 157-158° (C % calculé 61,27, trouvé 60,35; H % calculé 7,23, trouvé 7,53); Tiffeneau et Mlle J. Lévy [8] donnent $É_{28}$ 159-162°; d_0 1,064; semicarbazone F 157-158°. La dicétone se produit ici par déshydrogénation de l'alcool précédent; elle a été caractérisée, en effet, par les données suivantes correspondant bien au butyrylbenzoyl $C_{11}H_{12}O_2$, $É_{14}$ 122-123°; $d_4^{18°5}$ 1,0349; $n_D^{18°5}$ 1,5215; R. M. trouvé 52,41, calculé 49,88; C % calculé 75,0, trouvé 74,1; H % calculé 6,81 %, trouvé 6,66 %; bisemicarbazone $C_{13}H_{18}N_6O_2$ F 253-254° (C % calculé 53,79, trouvé 52,3; H % calculé 6,2, trouvé 6,7; N % calculé 28,9, trouvé 28,7).

En résumé l'isomérisation des glycols α.α'-diéthyléniques par simple distillation sur le nickel de Raney donne facilement les dicétones correspondantes; dans le cas des glycols α-éthyléniques, α'-arylé, on passe facilement par isomérisation au cétol saturé correspondant, selon le schéma

$$R{-}CH{=}CH{-}CHOH{-}CHOH{-}Ar \rightarrow R{-}CH_2{-}CH_2{-}CO{-}CHOH{-}Ar;$$

mais ensuite par déshydrogénation l'obtention de la dicétone

$$R{-}CH_2{-}CH_2{-}CO{-}CO{-}Ar$$

est plus difficile.

Les détails expérimentaux et les variations dans les rendements avec les conditions expérimentales seront donnés dans un autre recueil.

PÉDOLOGIE. — *La différenciation de l'illite et de l'attapulgite sur les diagrammes aux rayons X des fractions argileuses des sols.* Note de **M. Roger Michaud**, présentée par M. Charles Mauguin.

La méthode des croûtes d'argile préparées par sédimentation et dessiccation [1] permet de différencier, par les diagrammes de diffraction aux rayons X, les minéraux argileux purs [2], en particulier l'illite de l'attapulgite. Cette différenciation devient difficile quand on a affaire à des fractions argileuses de sols agricoles susceptibles de contenir un mélange de ces deux minéraux, à faible teneur en attapulgite.

En effet : 1° les diagrammes X (en particulier ceux des sols méditerranéens que nous étudions) sont peu nets au delà de 2,5 à 3 Å, de sorte que cette

---

(8) *Bull. Soc. Chim.*, [4], 37, 1925, p. 1250.

(1) *Comptes rendus*, R. Michaud, 220, 1945, p. 53; R. Michaud, R. Cerighelli et G. Drouineau, 222, 1946, p. 94.

(2) A. Rivière, *Bull. Soc. Géol. Fr.*, 16, n°s 7-8-9, p. 463.

région extérieure ne peut pas servir à l'identification; 2° les raies (200) et (130), à 6,44 et 5,42 Å respectivement, spécifiques de l'attapulgite, sont faibles et disparaissent rapidement quand la teneur en ce constituant diminue; 3° les raies intenses à 10 Å environ se recouvrent trop pour qu'on puisse les utiliser à la distinction des deux constituants; 4° la longueur même de la raie à 10 Å environ (petit arc pour l'illite pure, cercle presque complet pour l'attapulgite pure) dépend trop de différents facteurs (dispersion des orientations etc.) pour servir de critère dans le cas d'une faible teneur en attapulgite.

Pour nous rendre compte de la précision atteinte, nous avons pris des diagrammes de mélanges synthétiques d'illite pure du Pays de Galles et d'attapulgite pure de Géorgie. Quand la teneur en attapulgite du mélange diminue à partir de 100 % : 1° le *faciès attapulgique* du diagramme disparaît vers 35 % d'attapulgite; 2° les raies (200) et (130) de l'attapulgite cessent d'être visibles à 25 % de ce constituant; 3° le cercle de l'attapulgite, à 10 Å environ, disparaît sur les diagrammes obtenus avec une croûte fixe orientée à 60° par rapport au faisceau incident, ou est réduit à un arc trop petit pour permettre l'identification certaine de l'attapulgite quand la teneur en celle-ci descend jusqu'à 15 % environ.

L'examen habituel ne permet donc pas de déceler moins de 15 % d'attapulgite en présence du complément à 100 % en illite.

Nous avons cherché à augmenter cette sensibilité en séparant les raies à 10 Å des deux constituants.

Pour réaliser cela, il suffit d'opérer avec une croûte d'argile, non plus verticale, mais horizontale, les plans de sédimentation étant parallèles à la ligne équatoriale du diagramme. Dans ces conditions, l'arc court d'illite est reporté aux pôles du diagramme (il reste bien visible, malgré l'élargissement des raies dans cette région, puisque la proportion d'illite est importante, par hypothèse) et ne masque plus l'arc allongé d'attapulgite, qui apparaît dans la région équatoriale du diagramme.

Moyennant cet artifice, on arrive à déceler encore 5 % d'attapulgite en présence de 95 % d'illite.

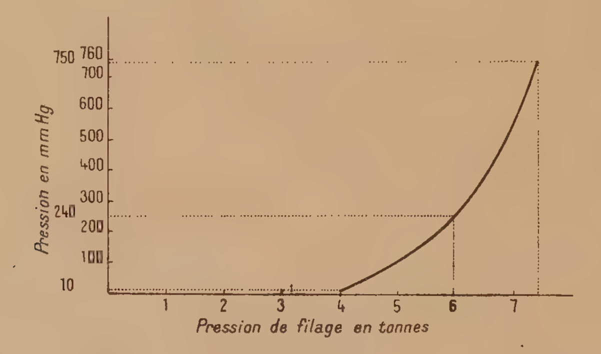
CÉRAMIQUE. — *Rôle des phénomènes de mouillabilité dans l'industrie céramique.* Note (¹) de M. **René Lecuir**, présentée par M. Paul Pascal

J'ai exposé dans une Note précédente la formation d'une structure orientée dans les poudres pressées. La plasticité des compositions utilisées dans la technique du filage céramique doit être plus élevée que celle des poudres, pour permettre à la masse de prendre un mouvement continu d'écoulement.

(¹) Séance du 5 janvier 1948.

Tresca a montré que ce mouvement présentait alors une direction privilégiée, parallèle à la direction de l'écoulement. Le retard pris par les couches proches des parois en raison des frottements est insuffisant pour l'assurer. Il ne se produit qu'autant qu'un étranglement suffisant de l'orifice de la filière vient épauler ces frottements. J'ai constaté alors ce pivotement d'une direction privilégiée de la masse, horizontale à la surface du piston, verticale à l'extrémité de la filière.

Ces conditions remplies, j'ai pu étudier le rôle de la désaération des pâtes céramiques au cours du filage. On attribue généralement à cette opération un rôle favorable en rapport avec la tension de vapeur de l'eau de la pâte sous vide. J'ai constaté que la pression nécessaire, pour la filière utilisée, diminuait en fonction du vide plus ou moins poussé existant avant la mise en charge du piston, suivant la courbe ci-dessous.



J'ai alors substitué à la suspension argileuse une pâte thixotropique dont le liquide de suspension était l'huile de vaseline, c'est-à-dire remplacé l'eau de l'expérience précédente par un liquide sans tension de vapeur dans les conditions de l'expérience. Le vide n'exerce plus alors aucune action.

Par contre, un broyage prolongé, ou mieux, plusieurs passages successifs dans la filière, ont alors un effet analogue à celui du vide sur les suspensions aqueuses. La pression nécessaire au filage diminue dans des proportions analogues.

Ces actions mécaniques ont pour effet d'accroître les contacts entre le liquide et la poudre et de parfaire le mouillage de la poudre par le liquide.

La vapeur d'eau, formée sous l'action du vide, devient saturante sous l'effet de la pression, déplace les gaz absorbés en se condensant à la surface des grains, et cette action est beaucoup plus importante que la simple élimination de l'air occlus entre les grains. Le mouillage des grains de la poudre, la diminution des frottements qui en résultent se traduisent par un net accroissement de la plasticité.

Le pourrissage des argiles, c'est-à-dire la plasticité accrue qu'entraîne un séjour prolongé à l'humidité, doit être également expliqué par une action de mouillage.

En fait, cette condition est toujours réalisée plus ou moins consciemment dans l'industrie céramique. L'extrême hygroscopicité de l'argile et le rôle d'agent mouillant de l'acide humique l'assurent dans la céramique classique. J'ai montré son importance dans l'agglomération des poudres et cette condition de mouillabilité se trouve encore respectée dans le procédé de coulage des oxydes purs dû à G. Schwerin, où la réalisation d'une suspension stable est obtenue par la fixation d'ions à la surface des grains de la poudre.

Le mouillage des grains de la poudre utilisée doit être considéré comme le principe premier et nécessaire de tout traitement céramique.

GÉOLOGIE. — *Sur la présence d'un noyau anticlinal devillien près de Neuve-Forge, dans le Massif cambrien de Rocroi.* Note [1] de M. **Gérard Waterlot.**

J'ai pu montrer [2] que le Massif cambrien de Rocroi correspond à un bassin synclinal complexe de Revinien, à flanc sud renversé, bordé de part et d'autre par le Devillien, et dont on peut attribuer la structure dans ses traits essentiels, à l'orogénèse calédonienne. Les plissements hercyniens, plus doux, ont au contraire plié l'aire synclinale en une voûte anticlinale dissymétrique dont on retrouve l'axe au milieu du Massif et au cœur de la masse revinienne. Cet axe est nettement visible à l'extrémité orientale du Massif, à Louette-Saint-Pierre, où le pli affecte à la fois le Cambrien et les couches dévoniennes limitrophes. Au même pli, j'ai attribué la réapparition des couches vertes devilliennes dans la région d'Eteignières, au sein de la forte masse de schistes noirs, reviniens. La raison en était que ces deux ondes anticlinales extrêmes pouvaient être considérées comme la manifestation d'un même pli parce qu'une troisième onde analogue, celle d'Anchamps, marquée par la réapparition en sens inverse de roches éruptives interstratifiées et de nature différente, se place exactement sur cet alignement général.

Une découverte récente confirme manifestement cette opinion et a des conséquences tectoniques et stratigraphiques importantes. Sur la rive gauche du ruisseau de Faux, à flanc de coteau et à 400^m au nord-ouest du hameau de Neuve-Forge, de grands travaux ont mis à jour une bande de 80^m de largeur occupée par des quartzites gris clair ou blancs, des schistes verts et même des fragments de schistes bleus ardoisiers. Ces roches proviennent de la tête des bancs plus ou moins disloqués mais en place. A 20^m plus au Nord, on observe de nouveau les mêmes roches suivant une bande plus mince. Le faciès est celui

(1) Séance du 19 janvier 1948.

(2) *Comptes rendus*, 204, 1937, p. 139 et p. 281; *Bull. Carte Géol. Fr.*, 39, 1937, p. 77 à 131; *Bull. Soc. Géol. Fr.*, (5), 15, 1945, p. 3 à 44.

du Devillien ardoisier, et je n'hésite pas à rapporter à cet étage les schistes verts et quartzites clairs observés. En effet, et en confirmation de cette opinion, on observe, au nord et au sud de ces deux îlots, comme entre eux deux, des schistes gris parfois rubanés et des quartzites gris sur une distance de 15 à 20^{m} avant de constater la présence définitive des schistes et quartzites noir franc du Revinien; ceci représente la zone de transition qui, ainsi que je l'ai montré ([3]), existe partout entre les deux étages devillien et revinien. Il s'agit donc ici du sommet d'un anticlinal, lui-même plissé, qui remonte au jour le Devillien vers le milieu de la bande de Revin, exactement comme à Éteignières.

Au nord de cette zone devillienne, dans les schistes noirs du Revinien inférieur, le gîte de diabase n° 38 de J. Gosselet ([4]) n'est pas simple; c'est en réalité un niveau double qui se répète par deux plis de sens contraire donnant un tracé apparent de six bandes. Au sud, entre la zone devillienne de Neuve-Forge et le hameau de Vieille-Forge, j'ai observé le passage de quinze bandes de diabase sans pouvoir juger de la valeur des ondes successives qui, à l'exemple du gîte n° 38, affectent certainement certains niveaux. D'ailleurs, ce secteur appartient au synclinal des Mazures puisque le Devillien de la bande de Rimogne-Deville réapparaît à 800 mètres au sud de Vieille-Forge; la répétition des filons-couches de roches éruptives est donc certaine. Alors que, au nord de la zone devillienne de Neuve-Forge, la direction des bancs s'opère vers l'est — 20° sud, au midi de la même zone, l'orientation se fait à l'est —20° nord. Cette observation prouve l'ennoyage à l'orient du pli anticlinal principal de Neuve-Forge.

Le Devillien d'Eteignières, celui de Neuve-Forge, l'onde d'Anchamps et celle de Louette-Saint-Pierre, qui intéresse aussi le Dévonien, sont quatre plis anticlinaux équidistants et parfaitement alignés. Ils se situent bien en conséquence sur l'axe anticlinal principal hercynien de l'Ardenne qui a remonté suivant cette direction le synclinorium de Revin d'âge calédonien, ayant ainsi tendance à le partager en deux cuvettes distinctes, au moins dans le secteur occidental de la Meuse. Par suite, le Revinien inférieur affleure largement vers le milieu de la bande de Revin jusqu'à l'approche des rives de la Meuse. L'axe anticlinal hercynien de l'Ardenne présente ainsi dans le Massif de Rocroi au moins deux zones de culmination, l'une à Eteignières et l'autre à Neuve-Forge, correspondant à des ondes positives transverses. La disposition des noyaux devilliens amenés au jour par cette tectonique et le passage graduel des sédiments devilliens aux roches reviniennes s'opposent à la conception purement théorique du recouvrement d'un Devillien autochtone par une lame énorme de charriage, d'origine lointaine, constituée par des roches reviniennes ([5]).

([3]) *Ann. Soc. Géol. Nord*, 67, 1947 (à l'impression).

([4]) *L'Ardenne* (*Mém. Carte géol. Fr.*, 1888, Pl. IV).

([5]) R. Anthoine, *Mém. Acad. Roy. Belg.*, 12, 1940, fasc. 4.

MÉTÉOROLOGIE. — *Sur les divers modes de condensation de la vapeur d'eau atmosphérique.* Note [1] de M. **Henri Dessens**, présentée par M. Charles Maurain.

On tend à admettre que la production de la pluie exige l'existence de *noyaux de sublimation* sur lesquels la vapeur d'eau se condenserait à l'état solide. Les plus simples à concevoir sont constitués par des cristaux de glace (hexagonaux).

Or, les noyaux de condensation dont l'existence, la nature et les propriété ont été étudiées directement [2] sont constitué s par une gouttelette de solution de chlorure de sodium. Le nombre par centimètre cube des gouttelettes dont le rayon est supérieur à 0,10 micron est comparable à celui des gouttelettes de nuages; ces rayons sont trop grands pour que la tension superficielle puisse jouer un rôle appréciable.

Par refroidissement ces noyaux-gouttelettes peuvent produire de la glace et du sel : ils sont donc susceptibles de fonctionner soit comme noyaux de condensation par leur sel hygroscopique, soit comme des noyaux de sublimation par leur glace.

D'aprés le diagramme de solubilité du chlorure de sodium, la précipitation

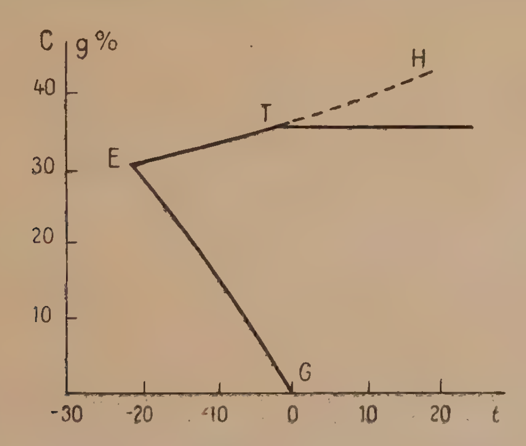


Diagramme de solubilité du chlorure de sodium.
T (— 2°,35 %) E (— 21°,31 %).

commence par la glace lorsque la concentration est inférieure à 31^g de sel pour 100^g d'eau; ce cas correspond à une gouttelette en équilibre dans une atmosphère dont l'humidité relative est supérieure à 0,80. Par suite du retard à la cristallisation, la goutte dont la solidification s'amorce est à une tempé-

---

(1) Séance du 12 janvier 1948.

(2) *Annales de Géophysique*, 3, 1, 1947, p. 68.

rature inférieure de Δt à la température de solidification commençante (— 21° à 0°) donnée par la courbe EG. Il se formera donc rapidement une masse de glace $\Delta m = m \Delta t/F$, m étant la masse de la goutte et F la chaleur de fusion de la glace; mais la solution restante n'est plus en équilibre avec l'air ambiant, puisque sa concentration a augmenté et sa tension de vapeur diminué; elle tend à condenser une masse de vapeur égale à Δm. Cette condensation libérerait une quantité de chaleur $Q' = \Gamma \Delta m$ qui est de l'ordre du 1/8 de la précédente. Ainsi, la cristallisation et la condensation étant rapides, mais non instantanées, et successives, le deuxième phénomène, dès son début, détruit l'effet du premier avant que la perte de chaleur dans l'air ambiant puisse intervenir.

La goutte peut échapper à ce processus si sa température initiale s'abaisse au-dessous de — 80° (solidification rapide de toute la goutte) ou si elle est captée par un obstacle (givrage).

Examinons le cas où l'humidité relative h reste inférieure à 0,80. La solution est sursaturée par rapport au chlorure de sodium anhydre (cubique), mais soussaturée par rapport à l'hydrate NaCl, $2H_2O$ (monoclinique). Son refroidissement, s'il ne peut favoriser la précipitation du chlorure anhrydre (solubilité variant peu avec la température), entraîne la métastabilité de la solution par rapport à l'hydrate dès que la température est devenue inférieure à une valeur, comprise entre — 2° et — 21°, donnée en fonction de la concentration par la courbe ET. Dès que la cristallisation de l'hydrate est amorcée, la solution restante, dont la concentration a diminué et dont la tension de vapeur a augmenté, tend à se vaporiser complètement; mais cette vaporisation refroidit la gouttelette et peut conduire à la formation de petits cristaux de glace faisant partie de l'eutectique si sa température s'abaisse au-dessous de — 21° : de la glace peut donc se produire avec une température ambiante comprise entre — 21° et — 2°. Si la solidification ne s'amorce que pour des températures inférieures à — 21°, le noyau complètement solidifié pourra contenir des cristaux de glace plus gros que ceux de l'eutectique.

Il est impossible de préciser au-dessous de quelle température t, comprise entre — 21° et — 2°, c'est d'abord la glace et non le sel qui tend, lorsque h augmente progressivement, à fixer la vapeur d'eau. Au-dessous de t, les cristaux de glace seuls se développent; lorsque t est dépassée, le sel devient déliquescent et le noyau présente une portion liquide collée à la glace. Mais tandis que la solution ne peut condenser continuellement de la vapeur, sa concentration étant imposée par la valeur de h, la glace peut s'accroître indéfiniment.

En résumé, les noyaux-gouttelettes sont susceptibles d'engendrer des noyaux de sublimation pour des températures de l'ordre de — 80° en air humide, ou seulement inférieures à — 2° en air sec. Les noyaux de sublimation ainsi formés peuvent former des nuages de glace avec des températures se relevant jusqu'à 0°.

BIOLOGIE. — *Mue, activité thyroïdienne cyclique et cycle des gonades chez les Oiseaux passériformes.* Note de M. **Léon Vaugien**, présentée par M. Maurice Caullery.

Chez diverses espèces d'Oiseaux passériformes sauvages, tués dans la région du Poitou à toutes les époques de l'année, j'ai étudié, parallèlement à l'évolution cyclique des gonades (¹), les changements d'état de la thyroïde. Dans toutes les espèces et dans les deux sexes, cet organe manifeste une hypertrophie fonctionnelle considérable durant une période limitée et bien déterminée de l'année, qui coïncide exactement avec la mue estivale annuelle.

Chez la Mésange *Parus major* L., le poids de la thyroïde reste *inférieur à* 1^{mg} durant toute l'année, sauf pendant les mois de juin, juillet et août. Son poids subit alors un accroissement considérable et passe *par un maximum de* 30 *à* 40^{mg} en juillet. Les premiers signes d'hypertrophie coïncident rigoureusement avec la brusque chute de poids subie par le testicule à la fin de la période printanière de reproduction (¹). Durant toute la période d'hypertrophie thyroïdienne, j'ai observé les phases successives de la mue, qui atteint les diverses plumes dans un ordre invariable et cesse totalement lorsque la thyroïde est au repos.

Chez le Pinson, dont la période de reproduction se prolonge jusqu'au 15 juillet, c'est à cette date seulement que débute l'hypertrophie thyroïdienne qui, accompagnant toujours la mue, ne prend fin qu'au début d'octobre. La concordance entre les trois phénomènes (régression testiculaire, activité thyroïdienne, mue) subsiste, malgré un notable décalage dans la saison.

De nombreux auteurs ont observé la chute des plumes de divers Oiseaux en réponse à l'administration de produits thyroïdiens et j'ai obtenu le même résultat chez divers Fringillidés en captivité. Mes observations, en conduisant à mettre la mue annuelle des adultes en relation avec un rythme fonctionnel de la thyroïde, sont en accord avec ces résultats expérimentaux.

De plus, elles suggèrent l'idée d'une liaison entre le cycle d'activité de la thyroïde et celui des gonades : d'une part, le début de la stimulation thyroïdienne coïncide avec la cessation brusque de l'activité reproductrice et endocrinienne des gonades; d'autre part, le retour de la thyroïde au repos et la fin de la mue correspondent à l'époque où, dans l'ovaire, les ovocytes du lot susceptible d'être pondu l'année suivante ont atteint une taille de 250^{μ} (¹) et où les gonades deviennent réceptrices à la stimulation lumineuse (²).

Tous ces faits sont susceptibles d'une interprétation, à la lumière d'une hypothèse que j'ai déjà émise pour interpréter des expériences d'un autre ordre (²), et suivant laquelle une hypersécrétion de thyréostimuline hypophy-

---

(¹) *Comptes rendus*, **226**, 1948, p. 120.
(²) *Ibid.*, **222**, 1946, p. 926.

saire accompagnerait l'hypersécrétion de gonadostimuline au moment de la cessation de l'activité endocrinienne des gonades, à la fin de la période de reproduction annuelle.

Des observations relatives à la mue juvénile sont justiciables de la même interprétation. Les jeunes Mésanges, sortant du nid vers le 15 mai, possèdent une grosse thyroïde (30 à 40^{mg}). Le poids de cette glande demeure supérieur à 20^{mg} durant les mois de juin et juillet, puis diminue lentement pour atteindre sa valeur minima (1^{mg}) au début d'octobre. La mue juvénile, qui s'effectue entre le 1er juillet et le 1er octobre, est donc, comme la mue des adultes, liée à un état d'hypertrophie fonctionnelle de la thyroïde. Son début est sans doute déclenché par un état de réceptivité locale atteint par les premières plumes. De plus, comme la fin de la mue adulte, la fin de la mue juvénile et l'entrée en repos de la thyroïde se produisent à l'époque où les premiers ovocytes en croissance atteignent la taille au-dessus de laquelle ils sont capables de réagir à la gonadostimuline hypophysaire.

MORPHOGENÈSE. — *La genèse des organes sensoriels latéraux de la Truite* (Salmo fario-S. irideus). Note [1] de M. **Charles Devillers**, présentée par M. Louis Fage.

L'intervention des nerfs latéraux dans la genèse des neuromastes des Poissons est encore discutée. Pour Auer [2] les organes de *Salmo irideus* se développent en dehors de toute intervention nerveuse; par contre Bailey [3], Mori [4] (chez *Ameiurus* et *Carassius*) et Devillers [5] (chez *Salmo fario* et *irideus*) attribuent leur formation aux fibres latérales qui, déviées vers un point quelconque de l'épithélium, y déclenchent la formation de neuromastes ectopiques.

Les auteurs ne s'accordent pas non plus sur la réalité d'un rôle trophique du système nerveux vis-à-vis des organes latéraux. Selon Brokelbank [6], Parker [7] (chez *Ameiurus*) et Mori (*Carassius*), la section du nerf latéral entraîne la dégnérescence des neuromastes; Wœllwarth, par contre, 50 jours après l'arrachement du nerf, ne constate aucune modification des organes d'*Ameiurus*. Dans le cas de la Truite, les fibres latérales paraissent bien être les *inducteurs* des neuromastes, mais on ne sait pas encore si elles contrôlent l'intégrité structurale de ces organes.

---

(1) Séance du 12 janvier 1948.
(2) *Arch. Entw. Mech.*, 135, 1936, p. 253-268.
(3) *J. exp. Zool.*, 76, 1937, p. 187-234.
(4) *J. Fac. Sc. Univ. Tokyo*, 2, 1931, p. 185-194 et 195-200.
(5) *Ann. Paléont.*, 33, 1947, p. 1693.
(6) *J. exp. Zool.*, 42, 1925, p. 293-303.
(7) *Amer. Natur.*, 66, 1932, p. 147-158.

Pour tenter de résoudre ce problème, des fragments d'épithélium prélevés sur des alevins à l'emplacement des futurs canaux sensoriels (épithélium sensoriel) ont été greffés en des points du corps dépourvus de nerfs latéraux, comme l'espace interorbitaire ou le sac vitellin; donneurs et hôtes étaient du même âge (1 à 14 jours après l'éclosion). Les examens effectués 10 à 40 jours après l'opération ont donné les résultats suivants : un greffon prélevé avant 10 jours ne donne jamais qu'une masse amorphe de tissu; s'il est âgé de plus de 9 jours on peut y observer des neuromastes diversement conformés, comportant des cellules de soutien et des cellules sensorielles ou seulement des éléments de soutien. Ce ne seraient pas des néoformations mais plutôt les organes originels du greffon, qui, grâce au milieu intérieur de l'hôte, auraient survécu sans toutefois poursuivre le cours de leur différenciation.

Ainsi les neuromastes doivent être achevés pour pouvoir subsister; trop jeunes et simplement ébauchés (greffons de moins de 10 jours), ils dégénèrent après rupture de leurs connexions nerveuses.

Des greffons semblables à ceux des expériences précédentes, mais insérés sur l'emplacement du futur canal supra-orbitaire, fournissent toujours, quel que soit leur âge, des différenciations complètes : portions de canaux pourvus de neuromastes et entourés d'une gaine osseuse.

Ces résultats s'expliqueraient en admettant que les organes, même rudimentaires, attirent à eux (chimiotactisme ?) les fibres latérales de l'hôte. Ces dernières, jouant un rôle trophique au moins dans les premières étapes de la formation des neuromastes, leur permettront de poursuivre leur développement comme des organes normaux. Il s'agit réellement d'une attraction exercée par les neuromastes, et non d'une rencontre fortuite des nerfs. En effet des fragments d'épithélium banal (prélevé sur le dos), d'âges variés (1 à 22 jours) et greffés dans les mêmes conditions, n'ont jamais fourni que des masses amorphes de tissu; pour que dans un tel épithélium, incapable d'attirer les nerfs, se différencient des neuromastes (cas des organes ectopiques) les fibres latérales doivent venir d'elles-mêmes à son contact; ceci peut arriver lors de la régénération d'un nerf blessé.

L'épithélium sensoriel se comporte donc comme un greffon déterminé dont les capacités se manifestent plus tôt s'il est transplanté dans le champ où il évolue normalement et où il peut rencontrer son *inducteur* qui serait le composant latéral du système nerveux; jusqu'ici rien n'a pu indiquer l'intervention d'une autre structure. Chez les Amphibiens, par contre, les nerfs sont dépourvus de rôle et la détermination, très précoce (neurula) revient au mésoderme ou à la crête ganglionnaire (Holtfreter, Bytinsky-Salz) [8], [9].

En conclusion les neuromastes de la Truite ne sont pas des autodifférencia-

---

([8]) *Zeits. vergl. Physiol.*, 20, 1933, p. 215-250.

([9]) *Arch. Entw. Mech.*, 138, 1938, p. 163-196 et 114, 1929, p. 593-664.

tions épithéliales, mais des différenciations provoquées par les nerfs. Ces derniers présenteraient quelques jours un rôle trophique (action possible de *l'hormone* d'Olmsted) indispensable pour permettre le plein développement de l'organe qui dégénère si cette connexion est rompue. Passé ce stade, l'intégrité structurale du neuromaste cesse d'appartenir au contrôle des fibres latérales qui peuvent être sectionnées sans dommage (cas comparable à celui des Batraciens). Un contrôle hormonal pourrait intervenir comme chez les Batraciens (Dawson) ([10]).

Les données de ce travail ne s'appliquent pas aux bourgeons du goût que May ([11]) a vu disparaître après section de leurs nerfs.

ÉCOLOGIE. — *Rapports entre la phototaxie des Termites et l'éclairement qui la détermine.* Note de M. **Gaston Richard**, présentée par M. Louis Fage.

La présente Note étudie les réactions des *larves* du Termite à cou jaune (*Calotermes flavicollis* Fab.) à la lumière. Le stimulus consiste en un *faisceau de rayons lumineux convergents*, où l'éclairement croît quand on s'éloigne de la source. Les expériences ont lieu en chambre noire.

Bien que les larves des six premiers stades soient photonégatives, placées dans le faisceau, *elles s'éloignent de la source lumineuse* et se dirigent vers le point de convergence des rayons, où l'éclairement est maximum. Les larves du septième stade (les plus âgées) deviennent photopositives lorsque la mue imaginale approche, et se déplacent cependant en sens inverse des précédentes. Si nous substituons un flux de rayons parallèles ou de rayons divergents au faisceau convergent, des résultats inverses sont observés. L'orientation des traces est alors liée au schéma conventionnel qui figure, en physique, la direction des rayons, quel que soit le gradient d'intensité : une larve photopositive se rapproche de la source lumineuse; une larve photonégative s'en éloigne.

L'éclairement au départ règle le mode de fuite : au-dessous d'une centaine de lux, les Insectes ne se déplacent que par des mouvements tournants (*cinèses simples*). Les pistes présentent des boucles, des méandres, et reviennent souvent sur elles-mêmes. Toutefois, peu à peu, la larve en expérience s'éloigne de la source lumineuse. Au-dessus de 2000 lux, les Termites fuient tous en ligne droite (*tropotaxie*). Les traces sont rectilignes, ou tout au moins très tendues. Les larves s'éloignent rapidement de la source lumineuse. Les éclairements intermédiaires provoquent toute une gamme de traces mixtes.

([10]) *J. exp. Zool.*, 74-75, 1936-1937, p. 221-231.
([11]) *J. exp. Zool.*, 42, 1925, p. 371-410 et *Comptes rendus*, 180, 1925, p. 546.

La sensibilité des Termites à l'action orientante de la lumière augmente avec l'âge des sujets. Ainsi, une larve du sixième stade parcourt une piste rectiligne dès que l'éclairement dépasse 200 lux, alors qu'il faudra 2000 lux pour obtenir la même trace avec une larve des tout premiers stades. Ces différences de réactions motrices sont peut-être en rapport avec l'*immaturité* du système nerveux central des jeunes et avec un perfectionnement constant des récepteurs sensoriels au fur et à mesure de la croissance des Insectes.

Que l'éclairement soit fort ou qu'il soit faible, une larve donnée se déplace toujours à la même vitesse, contrairement à ce qu'on observe avec certains Insectes. Mais, bien que sa vitesse de translation reste constante, le Termite s'éloigne plus ou moins rapidement de la source lumineuse, suivant que la piste parcourue est rectiligne (forts éclairements) ou circulaire (faibles éclairements).

Pour interpréter l'ensemble des faits rapportés ici, il est nécessaire de bien séparer les deux facteurs physiques : direction des rayons lumineux et gradient d'intensité. L'étude du comportement dans un faisceau de rayons convergents permet d'assurer que le premier tient le rôle le plus important.

En effet, bien que photophobe, le Termite peut être amené, dans ce cas, à se diriger vers des régions où l'éclairement est très fort (point de convergence des rayons). L'Insecte est alors véritablement canalisé par la direction du rayonnement lumineux, sans que le gradient d'intensité joue un rôle notable (nous voyons là un critère de *phototropotaxie négative*). Le seul effet de l'éclairement stimulant est de rendre le Termite plus ou moins esclave du flux de rayons : l'animal est mieux polarisé lorsque l'intensité lumineuse au départ est forte que lorsqu'elle est faible.

CHIRURGIE EXPÉRIMENTALE. — *Sur l'auto-perfusion cardio-encéphalique pendant l'exclusion de la circulation intracardiaque en vue de la chirurgie des cavités du cœur.* Note de M. **Jean Kunlin**, présentée par M. René Leriche.

La chirurgie intracardiaque, à l'étude actuellement de divers côtés, n'est possible que si l'on peut ouvrir le cœur droit ou le cœur gauche à sec, c'est-à-dire qu'elle exige le blocage temporaire de la circulation dans les cavités du cœur.

Le blocage peut être réalisé par occlusion temporaire des deux veines caves et de la veine azygos ou de l'artère pulmonaire. Il a été utilisé par Mercier Fauteux qui a montré récemment que l'intervalle de sécurité était trop bref pour permettre les manœuvres projetées, à cause du risque de l'ischémie cérébrale temporaire et du danger représenté par l'arrêt de la circulation coronarienne.

Il faut donc trouver un dispositif qui assure la circulation encéphalique et la circulation coronarienne pendant la durée du blocage de la circulation intracardiaque.

Il nous a paru, au laboratoire de chirurgie expérimentale du Collège de France, qu'il devait être possible de faire, pendant l'expérience, une autoperfusion, en prenant le sang dans l'aorte et en le ramenant au bout de quelques instants là où il a été pris, pendant que les cavités seraient à sec.

L'expérience a été conçue de la façon suivante : le cœur étant mis à nu, un clamp fut placé sur l'aorte, en aval du tronc brachio-céphalique gauche. L'aorte fut ponctionnée en amont de ce clamp. Le sang fut ainsi recueilli dans un flacon à Subtosan (200 à 300$^{cm^3}$), soit 1/5 de la masse sanguine totale. Puis l'artère pulmonaire fut clampée tandis que par abaissement du flacon le sang était réinjecté dans l'aorte et par elle retournait au cerveau et au myocarde, la fermeture des valvules sigmoïdes l'empêchant de rentrer dans le cœur. Après ponction d'un des ventricules, pour en recueillir le sang restant, le ventricule fut incisé, sa cavité explorée puis le cœur fut recousu, et la circulation rétablie lentement.

Dans nos expériences, le cœur n'a cessé de battre régulièrement pendant tout l'arrêt de la circulation intracardiaque. Nous reviendrons ultérieurement sur les constatations que nous avons pu faire.

Dans les premiers essais, les animaux mouraient d'habitude par fibrillation provoquée en particulier par un retour trop rapide du sang dans l'aorte. Puis après mise au point des détails que seule l'expérience pouvait apprendre, un animal put être gardé en vie, sans dommage, après sept minutes de suspension circulatoire dans le cœur.

Voici le fait ;

Le 9 décembre 1947, *chien* n° 104, 12 kilos. — Morphine chloralose, thoracotomie gauche large. Incision du péricarde. Novocaïnisation de la base du cœur autour de l'aorte et de la pulmonaire.

Dans un flacon de sérum, on a mis 200$^{cm^3}$ de Subtosan chaud avec 20^{mg} d'héparine.

On clampe l'aorte en aval du tronc brachio-céphalique gauche. Ponction de l'aorte en amont du clamp : le sang pénètre dans le flacon à Subtosan. 200$^{cm^3}$ de sang sont prélevés sans que le cœur présente une accélération importante. La pression sanguine a baissé à la fin du prélèvement qui représente environ 1/5 de la masse sanguine totale de ce chien. On a l'impression qu'on aurait pu facilement prélever une quantité plus grande de sang.

On clampe alors l'artère pulmonaire, et le flacon est élevé à environ 70^{cm} au-dessus de l'aorte : le retour du sang mélangé au Subtosan héparinisé dans l'aorte se fait assez rapidement, environ 80$^{cm^3}$ à la minute.

Le cœur bat tranquillement à 100 à la minute environ, mais petit à petit le cœur droit commence à se dilater; ses mouvements se ralentissent et faiblissent rapidement. On le ponctionne alors, soit 2 minutes après le clampage de l'artère pulmonaire avec une aiguille de 15/10 montée sur un tube de caoutchouc. Le sang est recueilli dans un deuxième flacon.

Le cœur droit reprend petit à petit ses dimensions normales; ses battements deviennent plus énergiques. Ils reprennent leur rythme à 100 à la minute.

Au bout de 5 minutes, le grand flacon transfuseur étant vide, on enlève le clamp pulmonaire. Le cœur continue de battre régulièrement. On enlève l'aiguille du ventricule droit. Mais absorbé par l'observation des réactions du cœur, on oublie d'enlever l'aiguille de l'aorte : le flacon s'est rempli de 150$^{cm^3}$ de sang. On clampe alors à nouveau l'artère pulmonaire et l'on réinjecte le sang dans l'aorte. Une minute après le clampage pulmonaire, on ponctionne à nouveau le ventricule droit qui commence à se dilater de nouveau. Le cœur bat régulièrement. La réinjection du sang est terminée deux minutes plus tard. Ce sang assez foncé n'était pas aussi oxygéné que le premier recueilli. On lâche alors progressivement le clamp de la pulmonaire. Il y a eu en tout interruption de la circulation intracardiaque pendant plus de 7 minutes, 5 la première fois, plus de 2 la deuxième fois avec un intervalle de 1 minute On enlève alors le clamp aortique. Un point de suture est mis sur l'aorte au niveau du trou de ponction.

Le cœur s'est sensiblement accéléré après l'ablation du clamp aortique et la pression sanguine a baissé. On injecte alors le sang recueilli dans le ventricule droit, soit environ 150$^{cm^3}$.

Fermeture du thorax. — Le pouls à l'aine est alors de 155. On injecte 280$^{cm^3}$ de Subtosan chaud après quoi le pouls est mieux frappé à 150 à la minute. La respiration est à 16 à la minute. Le chien s'est réveillé normalement. Le lendemain il est alerte, boit, mange, urine, a des selles. Il ne présente aucun trouble et est actuellement, au bout de six semaines, en bonne santé.

Il est donc possible de maintenir en état suffisant la circulation encéphalique et la circulation coronarienne par le dispositif indiqué. Les expériences se poursuivent pour mettre au point l'appareillage nécessaire.

PHYTOTHÉRAPIE. — *Sur un traitement africain de différentes affections oculaires.* Note de MM. **Joseph Kerharo** et **Armand Bouquet**, présentée par M. Joseph Magrou.

Au cours de notre Mission d'Étude de la Pharmacopée africaine (O. R. S. C.), notre attention fut attirée dès 1946 sur les guérisons obtenues en divers points de la Côte d'Ivoire par un *ouvreur d'yeux*. En 1947 nous eûmes la bonne fortune de pouvoir étudier les modalités du traitement.

Le guérisseur distingue quatre catégories de maladies oculaires : *fara*, *niagbé*, *niafi*, *nianiama-dimi* (dialecte malinké) correspondant plus ou moins et sous réserve de diagnostic médical ultérieur : 1° aux cataractes; 2° aux affections de la cornée; 3° aux affections du fond de l'œil et du nerf optique; 4° aux conjonctivites graves.

Quoi qu'il en soit, nous pouvons assurer, pour l'avoir constaté nous-mêmes, que des individus atteints de cécité ont pu retrouver partiellement la vue en suivant les traitements de ce *spécialiste* et nous avons en mains six dépositions d'anciens aveugles se déclarant guéris ou améliorés, dépositions prises officiellement en procès-verbal d'audition.

Les drogues et leurs préparations. — 1. Poudre noire : des graines d'*Indigofera hirsuta*, Linn. disposées dans une boîte métallique, sont chauffées sur des braises ardentes jusqu'à carbonisation, puis porphyrisées.

2. Poudre brune : des graines d'*Entada abyssinica*, Steud, placées dans une boîte de conserve munie de son couvercle, sont mises dans la braise pour les faire éclater et porphyrisées ensuite.

3. Sève de racine de *Ficus capensis*, Thunb.

4. *Décoctions aqueuses.* — Elles sont généralement préparées avec une quantité d'eau telle que le liquide affleure la partie supérieure des matériaux tassés dans une marmite. Au bout de trois quarts d'heure d'ébullition on laisse refroidir et l'on filtre la préparation.

a. Décocté de tiges feuillées d'*Entada abyssinica*, Steud.

b. Décocté de rameaux feuillés de *Cassia occidentalis*, Linn.

c. Décocté de *Costus Afer*, Ker. ou de *C. lucanusianus*, J. Braun et K. Schum. ; on emploie les tiges de l'un ou l'autre *Costus*.

d. Décocté de *Daniella Oliveri*, Hutch. et Dalz. avec feuilles et écorces.

e. Décocté de *Spondias Monbin*, Linn. avec feuilles et écorces.

f. Décocté de *Bridelia ferruginea*, Benth. ou *B. micrantha*, Baill. (indifféremment). Mettre dans le récipient une tige feuillée et les écorces d'une branche. Ajouter, outre l'eau, deux feuilles de *Daniella Oliveri*.

g. Décocté au dixième des graines d'*Indigofera hirsuta*, Linn.

h. Décocté au dixième de feuilles de *Paullinia pinnata*, Linn.

i. Décocté de *Cassia absus*, Linn., 5 à 10^{g} de graines sont mises à bouillir dans 100 à 200$^{cm^3}$ d'eau jusqu'à ce que les téguments de la graine soient bien détachés, les cotylédons mous et le liquide extractif amer.

Traitements. — 1° *Fara.* Pendant les trois premiers jours, le patient restant en *decubitus* dorsal, lui administrer matin et soir : dans le nez, poudre d'*Entada abyssinica* ; dans l'œil, une poudre minérale à base de chaux dont nous connaissons la composition, et le décocté de *Cassia absus*. Entre temps, et sans arrêt, faire alterner l'instillation oculaire de jus obtenu extemporanément par torsions de tiges de *Costus* avec l'application sur les paupières de compresses chaudes de graisse de péritoine de cabri. Continuer ce traitement pendant huit jours en supprimant les compresses et en espaçant les instillations de jus de *Costus*.

A partir de ce moment, donner en gouttes dans l'œil, jusqu'à très nette amélioration, un jour décocté de *Cassia occidentalis*, le lendemain décocté de *Cassia absus*. En fin de traitement instiller dans l'œil, un jour décocté de *Costus*, le lendemain sève de *Ficus capensis*. Durant la convalescence se laver les yeux deux fois par jour avec le décocté de *Spondias*.

2° *Niagbé.* Pendant 3 ou 4 jours, mettre matin et soir dans l'œil du malade la poudre minérale et le décocté de *Costus*. Dans la semaine qui suit,

n'appliquer ce traitement que le matin et se contenter le soir de l'instillation de *Costus*. Par la suite, espacer de plus en plus les applications de poudre minérale.

3° *Niafi*. Dans le traitement d'attaque donner matin et soir : poudre d'*Entada abyssinica* dans le nez et gouttes de décocté *Cassia absus* dans l'œil. Dès que le malade commence à reconnaître la lumière, ne donner la poudre d'*Entada* qu'une fois par jour, puis n'appliquer la médication que toutes les 48 heures; donner néanmoins dans l'intervalle le décocté de *Costus* et de *Cassia occidentalis* en gouttes oculaires.

4° *Nianiama-dimi*. Matin et soir, instiller dans l'œil quelques gouttes de décocté de *Bridelia* et de *Daniella Oliveri*.

Signalons pour terminer qu'avant de mener l'enquête dont nous avons consigné les résultats dans cette Note, un féticheur Guimini nous avait indiqué pour le traitement des ophtalmies graves les instillations oculaires de jus de feuilles tiédies d'*Entada abyssinica* et des bains d'yeux avec un macéré aqueux de racines de *Costus Afer*, tandis qu'un Haoussa de Lawra (Nord Gold-Coast) nous avait vanté le jus des graines de *Cassia absus*.

Parmi les espèces précitées les éléments essentiels sont certainement les Légumineuses et ensuite une Zingibéracée (*Costus*). Il est intéressant de remarquer d'une part que A. Chevalier a déjà signalé l'utilisation au Sénégal des fruits d'*Indigofera hirsuta*, d'autre part que les graines de *Cassia absus* contiennent une toxalbumine (absine) analogue à l'abrine de l'*Abrus precatorius* utilisé au Indes pour le même but thérapeutique.

Nous apportons, pour la première fois, des indications précises sur les modalités d'un traitement indigène complet des affections oculaires, traitement dont l'efficacité ne paraît pas douteuse et qu'il conviendrait de soumettre à l'épreuve clinique, à l'expérimentation pharmacodynamique, et même à l'étude physico-chimique.

La séance est levée à 16h.

A. Lx.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Ouvrages reçus pendant les séances de décembre 1947.

Chimie organique. — I. *Généralités.* — II. *Fonctions simples,* par Albert Kirrmann. Paris, Armand Colin, 1947 ; 2 vol. 16^{cm},5 (présenté par M. M. Delépine).

Technique forestière, par Philibert Guinier, Auguste Oudin, Léon Schæffer. Paris, Librairie agricole, horticole, forestière et ménagère, 1947 ; 1 vol. 23^{cm}.

Résistance to tobacco mosaic virus. — I. *Resistant tobacco varietis against mosaic virus experimentally produced,* by Dontcho Kostoff. — II. *Inheritance of necrotic reaction and plant breeding value of the form* Nicotiana tabacum *var.* virii, by Dontcho Kostoff and Rayna Georgieva. Sofia, 1944, 1 fasc. 23^{cm} (en langue bulgare).

Cytogenetics of the genus nicotiana, by Dontcho Kostoff. Sofia, 1941-1943 ; 1 vol. 24^{cm} (en langue bulgare).

Studies upon the nuclear and nucleolar cycles of development in plants, aminals and man, particulary with the reference to the aging of chromatin and other cytogenetic phenomena, by Dontcho Kostoff. Sofia, 1946 ; 1 fasc. 23^{cm},5 (en langue bulgare).

Variation des hybrides végétatives chez quelques Solonaceæ, par Rayna Georgieva, in *Scientific publications.* Vol. I, n° 1. Sofia, 1947 ; 1 fasc. 24^{cm},5 (en langue bulgare).

Autotetraploid Fagopyrum esculentum and Fagopyrum tataricum plants, produced by colchicine treatment by Dimiter K. Tzikov, in *Scientific publications.* Vol. 1, n° 2. Sofia, 1947 ; 1 fasc. 24^{cm},5 (en langue bulgare).

Centre international de synthèse. *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications.* Tome I, n° 1, dirigée par Pierre Brunet. Paris, Presses universitaires de France, 1947 ; 1 fasc. 25^{cm},5.

Association de géographes français. *Bibliographie géographique internationale,* 1940-1944. L^{e}-LIVe *bibliographie annuelle,* publiée par American geographical Society, Comitato geografico nazionale italiano, Royal geographical Society (London), Det Norske geografiske selskab (Oslo), Société belge d'études géographiques, Société royale de géographie d'Égypte, Magyar foldrajzi tarsasag (Budapest), avec le concours de la Fédération des Sociétés françaises de sciences naturelles, sous la direction de Elicio Colin. Paris, Armand Colin, 1947 ; 1 vol. 25^{cm},5 (présenté par M. Em. de Martonne).

Encyclopédie biogéographique et écologique. — II. *Observations écologiques en forêt de Basse Côte d'Ivoire,* par Renaud Paulian. Paris, Paul Lechevalier, 1947 ; 1 vol. 25^{cm} (présenté par M. A. Chevalier).

Encyclopédie biologique. XXV. *Le livre des plantes médicinales et vénéneuses de France,* par Paul Fournier, Tome I. Paris, Paul Lechevalier, 1947 ; 1 vol. 25^{cm} (présenté par M. A. Chevalier).

Diagnoses Algarum novarum post sylloges editionem descriptarum. II. *Florideæ centuria* I., par Joseph de Toni. Brixiae, Typ. Artigian Sumptibus Auctoris, IX-1947 ; 1 vol. en feuilles, 19cm.

Gouvernement général de l'Afrique occidentale française. Carte géologique de reconnaissance à l'échelle du 500000e. Levés effectués de 1931 à 1938. *Notice explicative sur la feuille Kindia-Ouest.* Paris, Imprimerie nationale, 1946 ; 1 fasc. 24cm.

Idem. — Levés effectués de 1931 à 1941. *Notice explicative sur la feuille Kita-Ouest.* Paris, Imprimerie nationale, 1946, 1 fasc. 24cm.

Savoir en histoire naturelle, Vol. XIX et Vol. XX. *Ce qu'il faut savoir des maladies des plantes cultivées et de leurs ennemis. La pratique des soins à donner au Potager, au Verger, aux grandes cultures,* par Jean Lhoste. Tomes I et II, A.-D. et E.-Z. Paris, Paul Lechevalier, 1947 ; 2 vol. 19cm.

Id. — Vol. XXI. — *Ce qu'il faut savoir des plantes médicinales de France,* par R. Ch. Guilliot. Paris, Paul Lechevalier, 1947 ; 1 vol. 19cm.

Institut des parcs nationaux du Congo belge. *Flore des spermatophytes du parc national Albert.* II. *Sympétales*, par Walter Robyns. Bruxelles, 1947 ; 1 vol. 27cm (présenté par M. R. Heim).

Caoutchouc. Cahiers I. R. C. I., Vol. I. Paris, Société d'éditions techniques coloniales (S. E. T. C. O.), 1944 ; 1 fasc. 27cm,5.

La mathématique et son unité. Introduction aux éléments de l'analyse et à la philosophie des sciences déductives, par Georges Bouligand et Jean Desbats, in *Bibliothèque scientifique.* Paris, Payot, 1947 ; 1 vol. 23cm.

Flore de Madagascar et des Comores (*Plantes vasculaires*), publiée sous les auspices du Gouvernement général de Madagascar et sous la direction de Henri Humbert. 24e famille. — *Scheuchzériacées ;* 25e famille. — *Alismatacées ;* 26e famille. — *Hydrocharitacées ;* 27e famille. — *Triuridacées ;* 33e famille. — *Flagellariacées ;* 34e famille. — *Restionacées ;* 35e famille. — *Xyridacées ;* 38e famille. — *Pontédériacées ;* 39e famille. — *Juncacées ;* 45e famille. — *Iridacées ;* 46e famille. — *Musacées ;* 47e famille. — *Zingibéracées ;* 48e famille. — *Burmanniacées ;* 106e famille. — *Burséracées ;* 114e famille. — *Anacardiacées ;* 115e famille. — *Aquifoliacées ;* 116e famille. — *Célastracées ;* 117e famille. — *Hippocratéacées ;* 118e famille. — *Salvadoracées ;* 140e famille. — *Flacourtiacées,* par Henri Perrier de La Bâthie. Tananarive, Imprimerie officielle, 1946 ; 8 fasc. 25cm.

ERRATA.

—

(Séance du 12 janvier 1948.)

Note de M. *André Charrueau*, Sur une transformation de contact :

Page 155, renvoi (¹), *au lieu de* 1939, *lire* 1948;

» 157, ligne 21, *au lieu de* $\mathcal{S}_1^{-1}(O_1, O_2, \vec{I}_1, \vec{I}_2)$, *lire* $\mathcal{T}_1^{-1}(O_1, O_2, \vec{I}_1, \vec{I}_2)$;

» » » 23, *au lieu de* $\mathcal{S}_1(O_1, O_2, \vec{I}_1, \vec{I}_2,)$, *lire* $\mathcal{T}_1(O_1, O_2, \vec{I}_1, \vec{I}_2,)$;

» » » 28, *au lieu de* circonférence $\mathcal{C}$, *lire* circonférence C;

» » » 32, *au lieu de* $\mathcal{C}$, *lire* C.